中山大学学报（自然科学版）
第29卷 第3期 1990年
ACTA SCIENTIARUM NATURALIUM UNIVERSITATIS SUNYATSENI
Vol.29 №.3 1990

一类函数积分方程的Fredholm 和非Fredholm定理*

刘运康 吴兹潜
（计算机科学系）

摘　要

研究一类函数积分方程的可解性，当解空间为C^∞时，得到了Fredholm 定理，当解空间为$C^n(n<+\infty)$时，就算子T的一个特殊情形，得到了非Fredholm定理．

关键词 函数积分方程，特征值，特征函数，非Fredholm定理

1 引　言

考虑函数积分方程

$$f(x)-\lambda Tf(x)=h(x),\qquad x\in[-R,\ R] \tag{1}$$

其中$0<R\leqslant+\infty$，当$R=+\infty$时，$[-R,R]=(-\infty,\ +\infty)$；$\lambda$是实参数，$f(x)$和$h(x)$分别是$[-R,R]$上的未知和已知函数，算子$T$形如

$$Tf(x)=\sum_{i=1}^{S}a_if(\alpha_ix)+\sum_{i=1}^{k}\int_0^1 b_if(\beta_ixt)\mathrm{d}t$$

这里S、K是正整数，a_i，b_i，α_i和β_i是常系数，且$|\alpha_i|<1$，$|\beta_i|\leqslant1$．

对整数$n\geqslant0$和实数$\mu\geqslant0$，引入函数空间

$$C_\mu^n[-R,R]=\{f(x)\in C^n[-R,R]\ |\ f^{(n)}(x)-f^{(n)}(0)=O(|x|^\mu)\},\ \mu>0,\ R<+\infty,$$

$$C_\mu^n[-\infty,+\infty]=\bigcap_{R=1}^{+\infty}C_\mu^n[-R,\ R],\ \mu>0$$

又记

$$C_0^n[-R,R]=C^n[-R,R],\qquad 0\leqslant n\leqslant+\infty,\ 0<R\leqslant+\infty,$$

$$C_\mu^0[-R,R]=C_\mu[-R,R],\quad \mu\geqslant0,\ 0<R\leqslant+\infty.$$

本文1989年12月19收到

*国家自然科学基金和中山大学科研基金资助项目

如果用V表示上述函数空间中的一个，易知算子T是V上的自映射，如无特别声明，我们在空间V上讨论方程(1)，都是指$f(x)$、$h(x)\in V$。

在函数空间V上，如果λ使得方程(1)的齐次方程

$$f(x)-\lambda Tf(x)=0, \qquad x\in[-R,\ R], \tag{2}$$

有非平凡解，则称λ是方程(1)或算子T的特征值，称相应的非平凡解为特征函数；称不是特征值的λ为正则值。

方程(1)对研究平面双曲型偏微分方程组的定解问题起着相当重要的作用，不难看出文[1,2]中的函数方程是(1)的特殊情形，而函数积分方程可化为(1)的特殊情形。

下面研究方程(1)的可解性，我们将就解空间的不同而得出性质截然不同的可解性判别定理，其中的Fredholm定理对函数积分方程组也成立。

2 Fredholm定理

对整数$k,n\geqslant 0$和实数$\mu\geqslant 0$，引入常数

$$p(k)=\sum_{i=1}^{s}a_i\alpha_i^k+\frac{1}{k+1}\sum_{i=1}^{k}b_i\beta_i^k,$$

$$q(\mu)=\sum_{i=1}^{s}|a_i||\alpha_i|^\mu+\frac{1}{\mu+1}\sum_{i=1}^{k}|b_i||\beta_i|^\mu,$$

对参数λ，定义集合

$$E(\lambda)=\{k\mid\lambda p(k)=1\}, \qquad E_n(\lambda)=\{k\in E(\lambda)\mid k\leqslant n\}$$

其中k为非负整数。

引理1 集合$E(\lambda)$是有限集，且$\max\{k\mid k\in E(\lambda)\}<\mu$，这里$\mu$是使$|\lambda|q(\mu)<1$的实数。

证明 由$\lim\limits_{\mu\to+\infty}q(\mu)=0$可知，存在正实数$\mu>0$，使$|\lambda|q(\mu)<1$；假如存在$j\in E(\lambda)$满足$j\geqslant\mu$，则

$$|\lambda p(j)|\leqslant|\lambda|q(j)\leqslant|\lambda|q(\mu)<1$$

与$\lambda p(j)=1$相矛盾，故引理1得证。

考虑函数积分方程

$$g(x)-\lambda T^*g(x)=r(x), \qquad x\in[-R,\ R] \tag{3}$$

其中算子T^*形如

$$T^*g(x)=\sum_{i=1}^{s}a_i\alpha_i^n\ g(\alpha_ix)+\sum_{i=1}^{k}b_i\beta_i^n\int_0^1 t^ng(\beta_ixt)\mathrm{d}t$$

我们有

引理2 设$r(x)\in C_\mu^0[-R,R]$，在空间$C_\mu^0[-R,R]$上，如果$|\lambda|<1/q(n+\mu)$，则

(i)当$\lambda p(n)\neq 1$时，方程(3)的解存在且唯一。

(ii)当$\lambda p(n)=1$时，当且仅当$r(0)=0$时，方程(3)的解存在，在相差一个任意常数的意义下解是唯一的。

证明　当$R<+\infty$时，在空间$U=\{g(x)\in C_\mu^0[-R,R]\mid g(0)=0\}$上考虑方程

$$g(x)-\lambda T^*g(x)=r(x)-r(0),\qquad x\in[-R,R] \tag{4}$$

定义范数

$$\|g(x)\|=\sup_{x\neq 0}|g(x)|/|x|^\mu$$

易知U是一个完备的赋范线性空间。注意到

$$\|g(\alpha_i x)\|\leqslant|\alpha_i|^\mu\|g(x)\|,$$

$$\left\|\int_0^1 t^n g(\beta_i xt)\mathrm{d}t\right\|\leqslant\int_0^1 t^n\|g(\beta_i xt)\|\mathrm{d}t$$

$$\leqslant\int_0^1|\beta_i|^\mu t^{n+\mu}\|g(x)\|\mathrm{d}t\leqslant\frac{1}{n+\mu+1}|\beta_i|^\mu\|g(x)\|,$$

故可得

$$\|\lambda T^*g(x)\|\leqslant|\lambda|q(n+\mu)\|g(x)\|,$$

由压缩映射原理可知，在空间U上，方程(4)的解存在且唯一，记为$g_0(x)$；令$x=0$，由(3)可得

$$(1-\lambda p(n))g(0)=r(0) \tag{5}$$

因此(i)当$\lambda p(n)\neq 1$时，$g(0)=r(0)/(1-\lambda p(n))$，故方程(3)的解$g(x)=g(0)+g_0(x)$是存在且唯一的；(ii)当$\lambda p(n)=1$时，由(5)可知，若方程(3)的解存在，必需$r(0)=0$；若$r(0)=0$，易知方程(3)的解存在，且必能表示为$g(x)=c+g_0(x)$，这里$c$为任意实常数。

当$R=+\infty$时，由$C_\mu(-\infty,+\infty)$的定义和上述结论即知引理2仍然成立。

定理1　在空间$C_\mu^n[-R,R]$上，如果$|\lambda|q(n+\mu)<1$，则

(i) 如果$E_n(\lambda)$是空集，则λ是算子T的正则值；

(ii)如果$E_n(\lambda)$是非空集，则λ是算子T的特征值，它只有有限多个线性无关的特征函数$f_i(x)=x^i$，$i\in E_n(\lambda)$；

(iii)如果λ是正则值，则方程(1)的解存在且唯一；

(iv)如果λ是特征值，则当且仅当$h^{(i)}(0)=0(i\in E_n(\lambda))$时，方程(1)的解存在，可表示为　$f(x)=f_0(x)+\sum\limits_{i\in E_n(\lambda)}c_ix^i$，其中，$f_0(x)$是方程(1)的一个特解，$c_i$是任意的实常数。

证明　由泰勒展开可知，求方程(1)的解$f(x)\in C_\mu^n[-R,R]$等价于求函数

$$f(x)=\sum_{i=1}^{n-1}\frac{1}{i!}c_ix^i+\int_0^x\frac{(t-x)^{n-1}}{(n-1)!}g(t)\mathrm{d}t$$

满足

$$(1-\lambda p(i))c_i=h^{(i)}(0),\qquad i=0,1,\cdots\cdots,n-1,$$

$$g(x)-\lambda T^*g(x)=h^{(n)}(x),\qquad x\in[-R,R],$$

其中$g(x)=f^{(n)}(x)\in C_\mu^0[-R,R]$，利用引理2即得定理1.

定理2　在空间$C^\infty[-R,R]$上，(i)算子T的特征值构成的集合是$\{\lambda_i\mid\lambda_ip(i)=1,$

$0\leqslant i<+\infty\}$;

(ii)如果λ是算子T的特征值，则它只有有限多个线性无关的特征函数$f_i(x)=x^i$，$i\in E(\lambda)$;

(iii)如果λ是算子T正则值，则方程(1)的解存在;

(iv)如果λ是算子T的特征值，则当且仅当$h^{(i)}(0)=0$ $(i\in E(\lambda))$ 时，方程(1)的解存在，可表示为$f(x)=f_0(x)+\sum\limits_{i\in E(\lambda)}c_ix^i$，其中$f_0(x)$是方程(1)的特解，$c_i$是任意的实常数。

证明 对固定的λ，由$\lim\limits_{n\to+\infty}q(n)=0$和$q(n)$的单减性可知，存在整数$m>0$，当$n>m$时，有$|\lambda|q(n)<1$，利用定理1和$n$的任意性可得出定理2。

3 非Fredholm定理

定理2说明方程(1)在空间$C^\infty[-R,R]$上具有Fredholm可解性，然而在空间$C^n_\mu[-R,R]$($n<+\infty$)上，方程(1)不一定具有Fredholm可解性。本节就算子T形如$Tf(x)=af(\alpha x)$，$a\neq0$，$0<|\alpha|<1$的情况，作详细的说明。

定理3 在空间$C^n_\mu[-R,R]$上，满足$|\lambda|>1/|a||\alpha|^{n+\mu}$的实数$\lambda$是算子$T$的特征值，它有无穷多个线性无关的特征函数。

证明 若$R=+\infty$，则对实数r>0，任取一个定义于$[-r,-|\alpha|r]\cup[|\alpha|r,r]$且满足

$$f_0(-r)-\lambda a\alpha^nf_0(-\alpha r)=f_0(r)-\lambda a\alpha^nf_0(\alpha r)=0$$

的连续函数$f_0(x)$，令

$$g(x)=\begin{cases}0, & x=0\\ (\lambda a\alpha^n|\alpha|^\mu)^{-m}|x|^\mu f_0(x/\alpha^m) & \\ & x\in(-|\alpha|^mr,-|\alpha|^{m+1}r]\cup[|\alpha|^{m+1}r,|\alpha|^mr)\quad m=0,\pm1,\cdots.\end{cases}$$

由$|\lambda a\alpha^n|\alpha|^\mu|>1$，可知，$g(x)\in \overset{0}{C}_\mu[-R,R]$并满足方程

$$g(x)-\lambda a\alpha^ng(\alpha x)=0,\ x\in[-R,R]$$

而函数

$$f(x)=\int_0^x\frac{(x-t)^{n-1}}{(n-1)!}g(t)\mathrm{d}t\in C^n_\mu[-R,R]$$

满足相应的齐次方程(2)，故λ是特征值，该$f(x)$是对应于λ的特征函数，由$f_0(x)$的任意性可知线性无关的特征函数有无穷多个。

当$R<+\infty$时，在以上过程中取$r=R,m=0,1,\cdots$即可。

定理4 在空间$C^n[-R,R]$上，如果$|\lambda|>1/|a||\alpha|^n$，则方程(1)的解存在。

证明 若$R=+\infty$,则对实数$r>0$，任取一个定义于$[-r,-|\alpha|r]\cup[|\alpha|r,r]$且满足

$$f_0(-r)-\lambda a\alpha^nf_0(-\alpha r)=h^{(n)}(-r),$$
$$f_0(r)-\lambda a\alpha^nf_0(\alpha r)=h^{(n)}(r)$$

的连续函数$f_0(x)$，构造$g(x)$满足

$$g(0)=h^{(n)}(0)/(1-\lambda a\alpha^n)$$
$$g(x)=f_0(x),\qquad |\alpha|r\leqslant|x|\leqslant r$$
$$g(\alpha^{m+1}x)=-(\lambda a\alpha^n)^{-1}[h^{(n)}(\alpha^m x)-g(\alpha^m x)],\quad |\alpha|r\leqslant|x|<r,\quad m=0,1,\cdots$$
$$g(\alpha^m x)=h^{(n)}(\alpha^m x)+\lambda a\alpha^n g(\alpha^{m+1}x),\quad |\alpha|r<|x|\leqslant r,\quad m=-1,-2,\cdots$$

易知$g(x)$在$[-R,R]-\{0\}$上是连续的，且由

$$g(\alpha^m x)=-\sum_{i=0}^{m-1}\frac{1}{(\lambda a\alpha^n)^{m-i}}h^{(n)}(\alpha^i x)+\frac{1}{(\lambda a\alpha^n)^m}f_0(x),$$
$$|\alpha|r<|x|\leqslant r,\qquad m>0,$$

可知 $\lim\limits_{m\to+\infty}g(\alpha^m x)=g(0)$，因而$g(x)$在$[-R,R]$上是连续的，由于$g(x)$满足方程

$$g(x)-\lambda a\alpha^n g(\alpha x)=h^{(n)}(x),\qquad x\in[-R,R],$$

故函数

$$f(x)=\sum_{i=0}^{n}\frac{h^{(i)}(0)}{(1-\lambda a\alpha^i)i!}x^i+\int_0^x\frac{(x-t)^{n-1}}{(n-1)!}g(t)\mathrm{d}t$$

是方程(1)在$C_0^n[-R,R]$上的解。

若$R<+\infty$，在以上过程中只需取$r=R$，$m=0,1,\cdots$即可。

定理5　在空间$C^n[-R,R]$上，$\lambda=-1/a\alpha^n$是算子T的正则值；此时，当且仅当级数

$$\sum_{i=0}^{\infty}(-1)^i(h^{(n)}(\alpha^i x)-h^{(n)}(0)),\qquad x\in[-R,R]\tag{6}$$

收敛到关于x的连续函数时，方程(1)的解存在。

证明　考虑齐次方程(2)，其解$f(x)$满足

$$f^{(j)}(x)+\alpha^{j-n}f^{(j)}(\alpha x)=0,\qquad x\in[-R,R],\ j=0,1,\cdots,n$$

取$x=0$可得$f^{(j)}(0)=0$，$0\leqslant j\leqslant n$，且

$$f^{(n)}(x)=-f^{(n)}(\alpha x)=\cdots=(-1)^m f^{(n)}(\alpha^m x)$$

令$m\to+\infty$，可得$f^{(n)}(x)\equiv0$，故$f(x)\equiv0$，因而$\lambda=-1/a\alpha^n$是正则值。

考虑非齐次方程(1)，由泰勒展开可知$f(x)$是方程(1)解的充要条件是

$$f^{(j)}(0)=h^{(j)}(0)/(1+\alpha^{j-n}),\qquad j=0,1,\cdots,n$$
$$f^{(n)}(x)+f^{(n)}(\alpha x)=h^{(n)}(x),\qquad x\in[-R,R]\tag{7}$$

而$f^{(n)}(x)$满足方程(7)的充要条件是

$$f^{(n)}(x)-f^{(n)}(0)=h^{(n)}(x)-h^{(n)}(0)-(f^{(n)}(\alpha x)-f^{(n)}(0))=\cdots\cdots\cdots$$
$$=\sum_{i=0}^{m}(-1)^i(h^{(n)}(\alpha^i x)-h^{(n)}(0))+(-1)^{m+1}(f^{(n)}(\alpha^{m+1}x)$$
$$-f^{(n)}(0)),$$

令$m\to+\infty$，可知当且仅当级数(6)收敛到关于x的连续函数时，$f^{(n)}(x)$连续且满足方程(7)，因而方程(1)的解存在。

尽管$\lambda=-1/a\alpha^n$是正则值，但$h(x)\in C^n[-R,R]$并不能保证方程(1)在$C^n[-R,R]$上有解，例如，$R<+\infty$，$h(x)\in C^n[-R,R]$满足

$$h^{(n)}(x)=h^{(n)}(0)+\frac{(-1)^{i+1}}{i+1}\cdot\frac{|\alpha|^iR-|x|}{(1-|\alpha|)|\alpha|^iR}+\frac{(-1)^i}{i}\cdot\frac{|x|-|\alpha|^{i+1}R}{(1-|\alpha|)|\alpha|^iR},$$

$$|\alpha|^{i+1}R\leqslant|x|\leqslant|\alpha|^iR,\qquad i=0,1,\cdots.$$

但级数

$$\sum_{i=0}^{+\infty}(-1)^i(h^{(n)}(\alpha^iR)-h^{(n)}(0))=\sum_{i=1}^{+\infty}\frac{1}{i}$$

是不收敛的，因而方程(1)无解。对$R=+\infty$，结论类似。

定理 6 在空间$C^n[-R,R]$上，$\lambda=1/a\alpha^n$是算子T的特征值，它只有一个线性无关的特征函数$f(x)=x^n$；此时，当且仅当$h^{(n)}(0)=0$且级数

$$\sum_{i=0}^{+\infty}h^{(n)}(\alpha^ix),\qquad x\in[-R,R]$$

收敛到关于x的连续函数时，方程(1)的解存在。

证明类似于定理5，从略。

利用定理1，由定理5、6可得

推论 1 在空间$C^n[-R,R]$上，(i)当$\lambda=-1/a\alpha^n$时，如果$h(x)\in C^n_\mu[-R,R]$，$\mu>0$，则方程(1)的解存在且唯一；

(ii)当$\lambda=1/a\alpha^n$时，如果$h(x)\in C^n_\mu[-R,R]$，$\mu>0,h^{(n)}(0)=0$，则方程(1)的解存在，且在相差x^n的常数倍的意义下是唯一的。

如果(1)是函数积分方程组，即$f(x)$，$h(x)$是函数向量，a_i，b_i是矩阵，用§2中的方法，不难得出类似的Fredholm定理。

参 考 文 献

〔1〕 Hua Lookeng et al., *Second order systems of partial differential equations in the plane*, Pitman Publishing, 1985

〔2〕 华罗庚等，二阶两个自变数两未知函数常系数线性偏微分方程组，科学出版社，北京，1979

〔3〕 吴兹潜等，中山大学学报(自然科学版)，25(1986),4,10～14

The Fredholm and Non-Fredholm Theorems for a class of Integro-Functional Equations

*Liu Yunkang** *Wu Ziqian*

Abstract

The solvability of equation (1) in space $C^n(0\leqslant n\leqslant+\infty)$ is studied, the Fredholm theorem is proved in the case $n=+\infty$, and the non-Fredholm theorem for $Tf(x)=af(\alpha x)$, $a\neq0$, $0<|\alpha|<1$ is obtained in the case $n<+\infty$.

Keywords integro-functional equation, eigenvalue, eigenfunction, non-Fredholm theorem

* Department of Computer Sicence