第31卷 第3期
1992年

中山大学学报（自然科学版）
ACTA SCIENTIARUM NATURALIUM
UNIVERSITATIS SUNYATSENI

Vol.31 No.3
1992

强平的Banach空间*

韩景銮　　黎永锦

（中山大学数学系）　（哈尔滨工业大学数学系）

摘　要　定义了强平的Banach空间，证明了若X是强平的，则X^*的范数是粗的，若X具有KMP，则X不存在等价的强平范数。

关键词　粗范数，强粗范数，端点，KMP

文[1]定义了Banach空间的粗范数，文[2]引进了强粗范数的概念。粗性主要反映光滑性较差的Banach空间的性质，如Banach空间$C[0,1]$和l_1的范数是粗的，而$l_1(\Lambda)$（Λ是不可数集）的范数是强粗的[1，3]。本文定义了强平性，是一类凸性很差的Banach空间所具备的性质，如Banach空间c_0就是强平的。证明了若Banach空间X是强平的，则X^*的范数是粗的。这表明若X的凸性很差，则X^*的光滑性亦是很差的。文内还给出了Banach空间X不存在等价范数$|||\cdot|||$，使（X，$|||\cdot|||$）是强平的Banach空间的一个充分条件。

定义1[1]　Banach空间X的范数称为是粗的，如果存在$\varepsilon>0$，使得对任意$x\in X$和$\delta>0$，存在x_1，x_2，$\mu\in X$，$\|x_i-x\|<\delta$，$i=1$，2。$\mu\in S(X)=\{x:\|x\|=1\}$满足$\tau(x_2,\mu)-\tau(x_1,\mu)\geqslant\varepsilon$。这里$\tau(x,y)=\lim\limits_{t\to0^+}t^{-1}(\|x+t\cdot y\|-\|x\|)$。

定义2[2]　Banach空间X的范数称为是强粗的，如果存在$\varepsilon>0$，使得对每一个$x\in S(X)$，有$\mu\in S(X)$使得$\tau(x,\mu)+\tau(x,-\mu)\geqslant\varepsilon$。

定义3　Banach空间X称为强平的，若存在$\varepsilon>0$，使得对任意$x\in S(X)$，有$y,z\in S(X)$满足$x=(y+z)/2$，且$\|y-z\|\geqslant\varepsilon$。

明显地，若Banach空间X是强平的，则它的单位球没有端点，故X不可能是共轭空间。

定理1　若Banach空间X是强平的，则存在$\varepsilon>0$对任意在$U(X)=\{x:\|x\|\leqslant1\}$上达到最大值的$f\in X^*$，有$y$、$z\in S(X)$，使得$f$在$[y,z]$上都等于其最大值，且$\operatorname{diam}[y,z]\geq\varepsilon$。这里$[y,z]=\{x\mid x=\lambda y+(1-\lambda)z,\ \lambda\in(0,1)\}$。

证明　若Bahach空间X是强平的，则存在$\varepsilon>0$，使得任意$x\in S(X)$，有y，$z\in S(X)$，

本文1990年12月6日收到
* 中山大学高等学术研究中心资助课题

满足$x=(y+z)/2$，且$\|y-z\|\geqslant\varepsilon$。如果$f$在$x\in U(X)$达到最大值，则$\|x\|=1$，故有$y$，$z\in S(X)$，使得$x=(y+z)/2$，且$\|y-z\|\geqslant\varepsilon$，因而$f((y+z)/2)=f(x)$，但$f(y)\leqslant f(x)$，$f(z)\leqslant f(x)$，因此$f(x)=f(y)=f(z)$，所以有$f(\lambda y+(1-\lambda)z)=f(x)$。对任意$\lambda\in(0,1)$成立，即$f$在$[y,z]$都等于其最大值，且$\mathrm{diam}[y、z]\geqslant\varepsilon$。

定理 2 若Banach空间X是强平的，则X^*的范数是粗的。

引理[3] 对Banach空间X的范数$\|\cdot\|$，下面性质等价。

（1） $\|\cdot\|$是粗的；

（2） 存在$\varepsilon>0$，使得对任意$x\in S(X)$和$\delta>0$，有$y\in S(X)$，满足$\|y-x\|<\delta$，且$\mathrm{diam}(A(x)\cup A(y))\geqslant\varepsilon$。

定理 2 的证明 既然X是强平的，故存在$\varepsilon>0$，使得对任意$x\in S(X)$，有y，$z\in S(X)$，满足$x=(y+z)/2$，且$\|y-z\|\geqslant\varepsilon$。对任意$f\in S(X^*)$和任意$\delta>0$，据Bishop—Phelps定理，存在$x\in S(X)$及$f_x\in A(x)=\{f\in S(X^*):f(x)=1\}$，使得$\|f-f_x\|<\delta$。由于X是强平的，故对$x\in S(X)$，有$y$、$z\in S(X)$，使得$x=(y+z)/2$，且$\|y-z\|\geqslant\varepsilon$，因而对任意$F\in A(f)$，有$\varepsilon\leqslant\|y-z\|\leqslant\|y-F\|+\|F-z\|$，故$\|y-F\|\geqslant\varepsilon/2$或$\|F-z\|\geqslant\varepsilon/2$，又$y$，$z\in A(f_x)$，所以存在$\varepsilon/2$，对任意$f\in S(X^*)$和$\delta>0$，存在$f_x\in S(X^*)$，使得$\|f-f_x\|<\delta$，且$\mathrm{diam}(A(f)\cup A(f_x))\geqslant\varepsilon/2$，由上面引理6即可知$X^*$的范数是粗的。

虽然Banach空间X是强平的时，X^*的范数一定是粗的，但X^*的范数可能不是强粗的如Banach空间c_0是强平的，但$l_1=c_0^*$的范数不是强粗的。不过，有下面定理。

定理 3 若Banach空间X是强平的，则存在$\varepsilon>0$，使得$A_\varepsilon=\{f\in S(X^*):\mathrm{diam}A(f)\geqslant\varepsilon\}$是$S(X^*)$的稠密集。

证明 既然Banach空间X是强平的，故由定理1可知，存在$\varepsilon>0$，使得对任一在U(X)上达到最大值的$f\in S(X^*)$，存在y、$z\in(X)$，使得f在$[y,z]$上都等于其最大值，且$\mathrm{diam}[y,z]\geqslant\varepsilon$。因而$f(y)=f(z)=\|f\|=1$，即$y$、$z\in A(f)$，因此$\mathrm{diam}\ A(f)\geqslant\varepsilon$。而由Bishop-phelps定理可知，在$U(X)$上达到最大值的$f\in S(X^*)$在$S(X^*)$上是稠密的，所以$A\varepsilon=\{f\in S(X^*):\mathrm{diam}A(f)\geqslant\varepsilon\}$是$S(X^*)$的稠密集。

由于Banach空间X范数是强粗的当且仅当存在$\varepsilon>0$，使任意$x\in S(X)$，$\mathrm{diam}A(x)\geqslant\varepsilon$[3]，由此，由上面定理3可知，当Banach空间X是强平的时，X^*的范数具有比强粗略弱的性质。既然强平的Banach空间c_0是可分的，故有等价范数使c_0成为严格凸空间，因此，严格凸的Banach空间可以具有等价范数，使其等价范数下是强平的。但对于具有KMP的Banach空间，则不存在等价范数，使其在此范数下是强平的。

定理 4 若Banach空间X具有KMP，则X不存在等价范数$|||\cdot|||$，使$(X,|||\cdot|||)$是强平的。

证明 若X有等价范数$|||\cdot|||$，使$(X,|||\cdot|||)$是强平的，则$U(X,|||\cdot|||)$没有端点，而$U(X,|||\cdot|||)$是$(X,\|\cdot\|)$的一个有界闭凸集，故X有一个有界闭凸集没有端点，但这与X具有KMP矛盾，因此命题得证。

参 考 文 献

1 Leach F B, Whitfield J H M. Proc Amer Math Soc, 1972, 33:120～126
2 John K, Zizler V. Comment Math Univ Carolinae, 1978, 19:335～349
3 Godini G. Proc Amer Math Soc, 1983, 87:239～245
4 Diestel J, Geomestry of Banach Spaces— selected topics, Springer-Verlag, 1975. 3～4

The Strongly Even Banach Space

Han Jinluan Li Yongjin*

Abstract The strongly even Banach space is defined. It is shown that if X is a strongly even Banach space then the norm of X^* is rough, and if X has KMP then X has not equivalent strongly even norm.

Keywords rough norm, strongly rough norm, extreme point, KMP

* Department of Mathemataies, Zhongshan University