第31卷 第4期 1992年
中山大学学报（自然科学版）
ACTA SCIENTIARUM NATURALIUM UNIVERSITATIS SUNYATSENI
Vol.31 №.4 1992

一类非线性退缩椭圆组弱解梯度的L^P-估计

陈宝耀
（中山大学数学系）

林长好
（华南师范大学数学系）

摘　要　利用Muckenhoupt 提出的A_2类函数的性质和带A_2类权函数的Sobolev空间$H^1(\Omega,\mathbf{R}^N,\lambda)$的嵌入不等式，对满足控制增长和自然增长两种条件下的拟线性退缩椭圆组，本文建立了弱解梯度的L^P-估计．只要$\lambda^2(x)\in A_2$，就可将M. Giaquinta关于一致椭圆组的有关结果推广到退缩椭圆组．

关键词　退缩椭圆组，梯度的L^P-估计，A_2类权函数

1　引　言

文[1]建立了带Muckenhoupt[2]权函数的Sobolev嵌入不等式和Poincaré不等式，并用以证明带A_2类权函数的一类拟线性退缩椭圆方程弱解的正则性．弱解梯度的L^P-估计是将文[3]关于一致椭圆组的部分正则性理论推广到带A_2类权函数的退缩椭圆组去的一个关键性步骤，由于$\lambda(x)$在Ω中既可取零值，也可趋于无穷大，为了避免无界系数情形，限于讨论退缩椭圆组，本文加上$\lambda(x)$有界的条件．证明了：①若有界函数$\lambda(x)\in A_2$，则$C_1R^{\frac{2r}{r-2}}\leqslant\lambda(B_R)\leqslant C_2R^n$，$\frac{2n}{n-1}<r\leqslant\frac{2n}{n-2}$；②把$H^1(\Omega)$的嵌入临界指数$r$的概念扩展到加权Sobolev空间$H^1(\Omega,\lambda)$，从而扩展了两类增长条件概念，并建立了加权的Sobolev-Poincaré不等式；③证明只要$\lambda^2(x)\in A_2$，则$H^1(\Omega,\mathbf{R}^N,\lambda)$弱解$u\in H^{1,P}_{LOC}(\Omega,\mathbf{R}^N,\lambda^{P/2})$，$P>2$．

记号：$\Omega\subset\mathbf{R}^n$，$n\geqslant3$，是有界开域，$\partial\Omega$表示$\Omega$的边界，$B_R=B_R(x_0)$表示以$x_0$为中心$R$为半径的球，$\omega_n$表示单位球体积，设$E\subset\mathbf{R}^n$，$|E|$表示它的体积．

$$\lambda^k(E)=\int_E\lambda^k(x)\mathrm{d}x,\qquad k=\pm\frac{1}{2},\ \pm1,\ \pm2.$$

$$u_R=\frac{1}{\lambda(B_R)}\int_R u(x)\lambda(x)\mathrm{d}x,\qquad \int\!\!\!\!\!\!-_{B_R}u\mathrm{d}x=\frac{1}{R^n}\int_{B_R}u(x)\mathrm{d}x.$$

本文采用重指标记号，即上下标i、j相同时表示从1至N求和；上下标α、β相同时表示从1至n求和．用C表示各种情况下的常数．

本文1990年2月22日收到

2 A_2类函数的性质

非负可测函数$\lambda(x)\epsilon A_P$，$1<P<\infty$，是指满足条件：

$$L_P=\sup_{B_R}\left(\frac{1}{|B_R|}\int_{B_R}\lambda(x)\mathrm{d}x\right)\left(\frac{1}{|B_R|}\int_{B_R}\lambda(x)^{-\frac{1}{P-1}}\mathrm{d}x\right)^{P-1}<\infty.$$

由Hölder不等式知：若$1<q<p$，$\lambda(x)\epsilon A_q$，则$\lambda(x)\epsilon A_P$。若$\lambda(x)\epsilon A_2$，则$\lambda^{\frac{1}{2}}(x)\epsilon$ A_2，且有

$$\left(\frac{1}{|B_R|}\int_{B_R}\lambda^{\frac{1}{2}}\mathrm{d}x\right)^2\leqslant\frac{1}{|B_R|}\int_{B_R}\lambda(x)\mathrm{d}x \tag{1}$$

$$\left(\frac{1}{|B_R|}\int_{B_R}\lambda^{-\frac{1}{2}}\mathrm{d}x\right)^2\leqslant\frac{1}{|B_R|}\int_{B_R}\lambda^{-1}(x)\mathrm{d}x \tag{2}$$

$$1\leqslant\left(\frac{1}{|B_R|}\int_{B_R}\lambda^{\frac{1}{2}}(x)\mathrm{d}x\right)\left(\frac{1}{|B_R|}\int_{B_R}\lambda^{-\frac{1}{2}}(x)\mathrm{d}x\right)\leqslant L_2^{\frac{1}{2}} \tag{3}$$

设$\lambda(x)\epsilon A_2$，定义函数

$$\bar{r}(B_R,\lambda)=\frac{2\log_R\frac{\lambda(B_R)}{\omega_n}}{\log_R\frac{\lambda(B_R)}{\omega_n}-2}=\frac{2\ln\frac{\lambda(B_R)}{\omega_n}}{\ln\frac{\lambda(B_R)}{\omega_n}-2\ln R} \tag{4}$$

对于相差一个正系数的A_2类函数，可以认为是同一的，故不妨设恒有

$$\lambda^{-1}(B_1)\leqslant\omega_n \tag{5}$$

由于$\lambda(x)$有界，不妨设$\lambda(B_R<\omega_n R^{2+\alpha}$，$\alpha\epsilon(0,1)$，于是，对$0<R<1$，有

$$R^{2n}<\frac{\lambda(B_R)}{\omega_n}<R^{2+\alpha},$$

以R为底取对数有：

$$2+\alpha<\log_R\frac{\lambda(B_R)}{\omega_n}<2n$$

由于$\bar{r}$是$\log_R\frac{\lambda(B_R)}{\omega_n}$的严格单调降函数，故得下述引理。

引理 1 存在正数R_0和β，使当$R\leqslant R_0$时

$$\frac{2n}{n-1}<\bar{r}<\beta<+\infty \tag{6}$$

记 $\bar{r}(\lambda)=\inf\limits_{B_R}\bar{r}(B_R,\lambda)$， $r_0=\sup\limits_{A_2}\bar{r}(\lambda)$

若$r\leqslant\bar{r}(\lambda)$则有

$$r\leqslant\left[2\log_R\frac{\lambda(B_R)}{\omega_n}\right]\Big/\left[\log_R\frac{\lambda(B_R)}{\omega_n}-2\right]$$

$$\omega_n R^{\frac{2r}{r-2}}\leqslant\lambda(B_R)\leqslant CR^n \tag{7}$$

任给$\frac{2n}{n-1}<r_1<r_0$，存在$\bar r(\lambda)\geqslant r_1$，由（7）有

$$\omega_n R^{\frac{2r_1}{r_1-2}}\leqslant CR^n\qquad\forall R\epsilon(0,R_0)$$

$$\therefore\quad r_1\leqslant\frac{2n}{n-2}$$

由此推知：　$r_0\leqslant\frac{2n}{n-2}$

另方面，由$\lambda(x)\equiv1\epsilon A_2$知：$r_0\geqslant\frac{2n}{n-2}$

$$\therefore\quad r_0=\frac{2n}{n-2}$$

若$r\geqslant\bar r$，由（7）和（4）有

$$C_1R^{\frac{2r}{r-2}}\leqslant\lambda(B_R)\leqslant C_2R^{\frac{2r}{r-2}} \tag{8}$$

一般地，我们得到下列定理。

定理1　设有界函数$\lambda(x)\epsilon A_2$，则存在正数R_0，C_1和C_2，使当$R\leqslant R_0$时，有

$$C_1R^{\frac{2r}{r-2}}\leqslant\lambda(B_R)\leqslant C_2R^n,\quad\frac{2n}{n-1}<r\leqslant\frac{2n}{n-2} \tag{9}$$

3　加权Sobolev空间与Poincaré不等式

定义范数

$$\|u\|_{L^p(\Omega,\lambda)}\equiv\left(\int_\Omega|u|^p\lambda(x)\mathrm{d}x\right)^{1/p}$$

$L^p(\Omega,\lambda)$表Ω上全体可测函数u，$\|u\|_{L^p(\Omega,\lambda)}<\infty$，组成的Banach空间。

若函数列$\{\varphi_K\}\subset C^\infty(\bar\Omega)$，在$L^p(\Omega,\lambda)$中$\varphi_K\to u$及$\nabla\varphi_K\to\vec v$，则称向量$\vec v$为$u$的梯度，记作$\nabla u$。

定义范数

$$\|u\|_{H^{1,p}(\Omega,\lambda)}\equiv\|u\|_{L^p(\Omega,\lambda)}+\|\,|\nabla u|\,\|_{L^p(\Omega,\lambda)}$$

和Sobolev空间

$H^{1,p}(\Omega,\lambda)\equiv C^{\infty}(\overline{\Omega})$关于范数$\|\cdot\|_{H^{1,p}(\Omega,\lambda)}$的完备化

$H_0^{1,p}(\Omega,\lambda)\equiv C_0^{\infty}(\Omega)$关于范数$\|\cdot\|_{H^{1,p}(\Omega,\lambda)}$的完备化

$H^{1,p}(\Omega,\mathbf{R}^N,\lambda)\equiv[H^{1,p}(\Omega,\lambda)]^N$

$H_0^{1,p}(\Omega,\mathbf{R}^N,\lambda)\equiv[H_0^{1,p}(\Omega,\lambda)]^N$

$H^1(\Omega,\lambda)\equiv H^{1,2}(\Omega,\lambda)$

$u\in H_{Loc}^{1,p}(\Omega,\lambda)$表示对$\forall\Omega'\subset\subset\Omega$，都有$u\in H^{1,p}(\Omega',\lambda)$。

引理 2（加权嵌入不等式） 设$\lambda(x)\in A_p$，$1<p<\infty$，则存在正数q（$1\leqslant q<p$）和C，使得对$\forall B_R\subset\mathbf{R}^n$，$\forall u\in H_0^{1,p}(\Omega,\mathbf{R}^N,\lambda)$及$\forall K\in[1,\frac{n}{n-p/q}]$，有

$$\left(\frac{1}{\lambda(B_R)}\int_{B_R}|u|^{Kp}\lambda(x)\mathrm{d}x\right)^{\frac{1}{Kp}}\leqslant CR\left(\frac{1}{\lambda(B_R)}\int_{B_p}|\nabla u|^p\lambda(x)\mathrm{d}x\right)^{\frac{1}{p}} \tag{10}$$

引理 3 设$\lambda(x)\in A_p$，$1<p<\infty$，则存在正数$q(1<q<p)$和C，使得对$\forall u\in C^{0,1}(\overline{B}_R)$和$\forall K\in[1,\frac{n}{n-p/q}]$有

$$\left(\frac{1}{\lambda(B_R)}\int_{B_R}|u-u_R|^{Kp}\lambda(x)\mathrm{d}x\right)^{\frac{1}{Kp}}\leqslant CR\left(\frac{1}{\lambda(B_R)}\int_{B_R}|\nabla u|^p\lambda(x)\,\mathrm{d}x\right)^{\frac{1}{p}} \tag{11}$$

据文[1]定理1.2和[2]引理5，可得一单调降数列$\{q_j\}$，其中$q_0=p$，$0<q_{j+1}-1=(q_j-1)(1-\frac{1}{2D-1})$，$D=20(3Lq_j)^{q'_j-1}$。当$q=q_j$时引理成立。记

$$q_\infty=\lim_{j\to\infty}q_j$$

于是当$1<K<\frac{n}{n-p/q_\infty}$时引理也成立。下面证明当$K=\frac{n}{n-p/q_\infty}$时引理仍成立。由于(10)式左端是$K$的单调增函数而且有界。记$A=\{x\in B_R,|u(x)|\geqslant1\}$。
由单调收敛定理有

$$\lim_{K\to\frac{n}{n-p/q_\infty}}\int_A|u|^{Kp}\lambda\mathrm{d}x=\int_A|u|^{\frac{np}{n-p/q_\infty}}\lambda\mathrm{d}x<\infty$$

$$\lim_{K\to\frac{n}{n-p/q_\infty}}\int_{B_R/A}|u|^{Kp}\lambda\mathrm{d}x=\int_{B_R\setminus A}|u|^{\frac{np}{n-p/q_\infty}}\lambda\mathrm{d}x<\infty$$

$$\therefore\quad\lim_{K\to\frac{n}{n-p/q_\infty}}\left(\frac{1}{\lambda(B_R)}\int_{B_R}|u|^{Kp}\lambda\mathrm{d}x\right)^{\frac{1}{Kp}}=\frac{1}{\lambda(B_R)}\int_{B_R}|u|^{\frac{np}{n-p/q_\infty}}\lambda\mathrm{d}x\Big)^{\frac{n-p/q_\infty}{np}}$$

同理可证引理3。

由于$C^\infty(\bar{B}_R)\subset C^{0,1}(\bar{B}_R)$，$C^\infty(\bar{B}_R)$在$H^{1,p}(B_R,\lambda)$中稠密，引理3对$u\in H^{1,p}(B_R,\mathbf{R}^N,\lambda)$也成立。

当$K=1$时，得加权Poincaré不等式。

$$\int_{B_R}|u|^p\lambda dx\leqslant CR^p\int_{B_R}|\nabla u|^p\lambda dx,\quad \forall u\in H_0^{1,p}(\Omega,\mathbf{R}^N,\lambda)$$

$$\int_{B_R}|u-u_R|^p\lambda dx\leqslant CR^p\int_{B_R}|\nabla u|^p\lambda dx,\quad \forall u\in H^{1,p}(\Omega,\mathbf{R}^N,\lambda)$$

定义1 $r=\min\left(\frac{np}{n-p/q_\infty},\bar{r}\right)$称为$H_0^{1,p}(B_R,\lambda)$的嵌入临界指数，当$\lambda(x)\in A_2$时，

$$\frac{2n}{n-1}<r\leqslant\frac{2n}{n-2}$$

与q_j相对应的数列$\{Lq_j\}$是单调增的，如果它有界，则$q_\infty=1$。例如，$\lambda(x)\equiv1$时，$Lq_j\equiv1$就属于这种情形，此时

$$r=2n/(n-2)$$

设$\lambda(x)\in A_2$，利用定理1得加权Sobolev-Poincaré不等式

$$\left(\int_{B_R}|u-u_R|^r\lambda dx\right)^{1/r}\leqslant C\left(\int_{B_R}|\nabla u|^2\lambda dx\right)^{1/2}\tag{12}$$

4 弱解梯度的L^p-估计

考虑拟线性椭圆组

$$-D_\alpha\left(a_{ij}^{\alpha\beta}(x,u)D_\beta u^j+a_i^\alpha(x,u)\right)=b_i(x,u,\nabla u)\tag{13}$$

满足退缩椭圆性条件：

$$\lambda(x)|\xi|^2\leqslant a_{ij}^{\alpha\beta}(x,u)\xi_\alpha^i\xi_\beta^j\leqslant\Lambda\lambda(x)|\xi|^2\quad\forall\xi\in R^{nN}\tag{14}$$

及
$$|a_i^\alpha(x,u)|\leqslant\lambda(x)(|u|^{\frac{r}{2}}+|f_{i,\alpha}|\quad r=\frac{2n}{n-p/q_\infty}\tag{15}$$

$$|f|=\left(\sum_{i=1}^N\sum_{\alpha=1}^n|f_{i,\alpha}|^2\right)^{1/2}\in L^p(\Omega,\lambda^{p/2}),\quad P>2$$

Ⅰ. $$|b_i(x,u,\nabla u)|\leqslant\lambda(x)\left(|Du|^{2(1-\frac{1}{r})}+|u|^{r-1}+|g_i(x)|\right)\tag{16}$$

$$|g|=\left(\sum_{i=1}^N|g_i|^2\right)^{\frac{1}{2}}\in L^{\frac{p}{2}\frac{r}{r-2}}(\Omega,\lambda^{p/2})$$

称为控制增长条件。或者

Ⅱ. $$|b_i(x,u,\nabla u)|\leqslant\lambda(x)\left(|\nabla u|^{2-\varepsilon}+|g_i|\right),\ \varepsilon>0.\tag{17}$$

或 $$|b_i(x,u,\nabla u)|\leqslant\mu\lambda(x)\left(|\nabla u|^2+|g_i|\right.\tag{17$'$}$$

称为自然增长条件。

若$u\in H^1(\Omega,\mathbf{R}^N,\lambda)$对$\forall\phi\in H_0^1(\Omega,\mathbf{R}^N,\lambda)$或者$u\in H(\Omega,\mathbf{R}^N,\lambda)\cap L^\infty(\Omega,\mathbf{R}^N)$对$\forall\phi\in H_0^1(\Omega,\mathbf{R}^N,\lambda)\cap L^\infty(\Omega,\mathbf{R}^N)$满足

$$\int_\Omega\left[a_{ij}^{\alpha\beta}(x,u)D_\beta u^j+a_i^\alpha(x,u)\right]D_\alpha\phi^i\mathrm{d}x=\int_\Omega b_i(x,u,\nabla u)\phi^i\mathrm{d}x \qquad (18)$$

则称u为方程组（13）的弱解。

定理2 设非负函数$\lambda(x)$有界并且$\lambda^2(x)\in A_2$，条件(14)～(18)成立，则方程组(13)的弱解$u\in H^{1,p}_{Loc}(\Omega,R^N,\lambda)$，$p>2$，且当$R$充分小时，有

$$\left[⨍_{B_R}(|\nabla u|+|u|^{r/2})^p\lambda\mathrm{d}x\right]^{1/p}\leqslant C\left[⨍_{B_{2R}}(|\nabla u|+|u|^{r/2})^2\lambda\mathrm{d}x\right]^{1/2}$$

$$+\left[⨍_{B_{2R}}(|f|+|F|)^p\lambda^{p/2}\mathrm{d}x\right]^{1/p} \qquad (19)$$

$$F=R\left(⨍_{B_{2R}}|g|^{\frac{r}{r-1}}\lambda\mathrm{d}x\right)^{(1-\frac{2}{r})/2}|g|^{\frac{r}{2(r-1)}}$$

证明 设$\eta(x)$是标准的截断函数，在(18)中令

$$\phi=(u-u_{2R})\eta^2$$

利用条件(14)～(16)得

$$\int_{B_R}|\nabla u|^2\lambda(x)\,\mathrm{d}x\leqslant CR^{-2}\int_{B_{2R}}|u-u_{2R}|^2\lambda\mathrm{d}x+C\int_{B_{2R}}|u-u_{2R}|^r\lambda\mathrm{d}x$$

$$+C\int_{B_{2R}}|u|^r\lambda\mathrm{d}x+C\int_{B_{2R}}|f|^2\lambda\mathrm{d}x$$

$$+\int_{B_{2R}}|g|\cdot|u-u_{2R}|\lambda(x)\mathrm{d}x \qquad (20)$$

现在估计上式右端各项

由$\lambda^2(x)\in A_2$，知$\lambda(x)\in A_{3/2}$，于是当$8\leqslant 3r$时，由(11)有

$$R^{-2}\int_{B_{2R}}|u-u_{2R}|^2\lambda\mathrm{d}x\leqslant c\lambda(B_R)^{-\frac{1}{3}}\left[\left(\int_{B_{2R}}|\nabla u|^2\lambda\mathrm{d}x\right)^{1/2}\right.$$

$$\left.\cdot\left(\int_{B_{2R}}|\nabla u|^{3/2}\lambda^{3/4}\mathrm{d}x\right)^{1/3}\left(\int_{B_{2R}}\lambda^{3/2}\mathrm{d}x\right)^{1/6}\right]^{4/3}$$

$$\leqslant CR^{n/9}\lambda^2(B_{2R})^{1/9}\lambda(B_{2R})^{-2/9}\left(\int_{B_{2R}}|\nabla u|^2\lambda\mathrm{d}x\right)^{8/9}\left(R^{n/2}⨍_{B_{2R}}|\nabla u|\lambda^{1/2}\mathrm{d}x\right)^{2/9}$$

利用（2）式得

$$\lambda^2(B_{2R})\lambda(B_{2R})^{-2}\leqslant CR^{-3n}\lambda^2(B_{2R})\lambda^{-2}(B_{2R})\leqslant CR^{-n}$$

$$\therefore\quad R^{-2}\int_{B_{2R}}|u-u_{2R}|^2\lambda\mathrm{d}x\leqslant\frac{1}{3}\int_{B_{2R}}|\nabla u|^2\lambda\mathrm{d}x+C\left(R^{n/2}⨍_{B_{2R}}|\nabla u|\lambda^{1/2}\mathrm{d}x\right) \qquad (21)$$

当$3r\leqslant 8$时，$\lambda(x)\in A_{4/r}$，由(11)得

$$R^{-2}\int_{B_{2R}}|u-u_{2R}|^2\lambda\mathrm{d}x\leqslant C\lambda(B_{2R})^{1-\frac{r}{2}}\lambda^2(B_{2R})^{\frac{r-2}{4}}\left(\int_{B_{2R}}|\nabla u|^2\lambda\mathrm{d}x\right)^{r/4}$$

$$\cdot\left(\int_{B_{2R}}|\nabla u|\lambda^{1/2})^{4-r}\mathrm{d}x\right)^{1/2}\leqslant CR^{n(2-r)}\lambda^{-1}(B_{2R})^{\frac{r-2}{2}}\lambda^2(B_{2R})^{\frac{r-2}{4}}$$

$$\cdot\left(\int_{B_{2R}}|\nabla u|^2\lambda dx\right)^{\frac{r+1}{4}}\left[\int_{B_{2R}}(|\nabla u|\lambda^{1/2})^{2(3-r)}dx\right]^{1/4} \tag{22}$$

如果$5\leqslant 2r<\frac{16}{3}$，由（2）上式可化为

$$R^{-2}\int_{B_{2R}}|u-u_{2R}|^2\lambda dx\leqslant\frac{1}{3}\int_{B_{2R}}|\Delta u|^2\lambda dx+C\left(R^{n/2}⨍_{B_{2R}}|\nabla u|\lambda^{1/2}dx\right)^2$$

如果$9\leqslant 4r<10$，接（22）则有

$$R^{-2}\int_{B_{2R}}|u-u_{2R}|^2\lambda dx\leqslant C\left(\int_{B_{2R}}|\Delta u|^2\lambda dx\right)^{\frac{2r+3}{8}}\left(R^{n/2}⨍_{B_{2R}}|\nabla u|\lambda^{1/2}dx\right)^{\frac{5-2r}{4}}$$

可见(21)式同样成立，一般地，当

$$3-\frac{1+2+\cdots+2^{k-1}}{2^k}<r<3-\frac{1+2+\cdots+2^{k-2}}{2^{k-1}}$$

时，经过k次步骤同样得(21)式：

$$\int_{B_{2R}}|u|^r\lambda(x)dx\leqslant C\int_{B_{2R}}|u-u_{2R}|^r\lambda dx+C\lambda(B_{2R})^{1-r}\left(\int_{B_{2R}}|u|\lambda dx\right)^r \tag{23}$$

利用（2）式有

$$\lambda(B_{2R})^{1-r}\left(\int_{B_{2R}}|u|\lambda(x)dx\right)^r\leqslant C\lambda(B_{2R})^{1-r}\left(\int_{B_{2R}}(|u|^r\lambda)^{1/2}dx\right)^{r/3}$$

$$\cdot\left(\int_{B_{2R}}|u|^r\lambda dx\right)^{\frac{6-r}{6}}\left(\int_{B_{2R}}\lambda^{\frac{6(r-1)}{5r-6}}dx\right)^{\frac{5r-6}{6}}$$

$$\leqslant CR^n\left(⨍_{B_{2R}}(|u|^r\lambda)^{1/2}dx\right)^2+\frac{1}{3}\int_{B_{2R}}|u|^r\lambda dx \tag{24}$$

把加权Sobolev-Poincére不等式（12）和（24）代入（23）得

$$\int_{B_{2R}}|u|^r\lambda dx\leqslant CR^n\left(⨍_{B_{2R}}|u|^r\lambda)^{1/2}dx\right)^2+C\left(\int_{B_{2R}}|\Delta u|^2\lambda dx\right)^{r/2} \tag{25}$$

由（12）式得

$$\int_{B_{2R}}|g||u-u_{2R}|\lambda dx\leqslant\left(\int_{B_{2R}}|u-u_{2R}|^r\lambda dx\right)^{\frac{1}{r}}\left(\int_{B_{2R}}|g|^{\frac{r}{r-1}}\lambda dx\right)^{1-\frac{1}{r}}$$

$$\leqslant\frac{1}{3}\int_{B_{2R}}|\nabla u|^2\lambda dx+CR^{2n(1-\frac{1}{r})}\left(⨍_{B_{2R}}|g|^{\frac{r}{r-1}}\lambda dx\right)^{2(1-\frac{1}{r})} \tag{26}$$

把（21）、（12）、（25）和（26）代入（20），然后两端加上（25）式，当适当小时有

$$⨍_{B_R}(|\nabla u|+|u|^{r/2})^2\lambda dx\leqslant b\left(⨍_{B_{2R}}(|\nabla u|+|u|^{r/2})\lambda^{1/2}dx\right)^2$$

$$+\theta⨍_{B_{2R}}(|\nabla u|+|u|^{r/2})^2\lambda dx+c⨍_{B_{2R}}|f|^2\lambda dx$$

$$+CR^{n(1-\frac{2}{r})}\left(⨍_{B_{2R}}|g|^{\frac{r}{r-1}}\lambda dx\right)^{2(1-\frac{1}{r})}$$

这里$0<\theta<1$，据〔3〕第五章命题1.1，得证定理2.

定理3　设非负函数$\lambda(x)$有界，$\lambda^2(x)\in A_2$，并且条件（14），（15）、（17）或者

（14）、（15）、（17）和小条件：$|u|\leqslant M$，$2\mu M\leqslant 1$成立，则方程组（13）的有界解 $u\in H^{1p}_{loc}(\Omega,\ \mathbf{R}^N,\ \lambda^{p/2})\cap L^\infty(\Omega,\ \mathbf{R}^N)$，$p>2$，且有不等式

$$\left(\fint_{B_R}|\nabla u|^p\lambda^{p/2}\mathrm{d}x\right)^{1/p}\leqslant C\left(\fint_{B_{2R}}|\nabla u|^2\lambda\mathrm{d}x\right)^{1/2}+\left(\fint_{B_{2R}}(|f|+|F|)^p\lambda^{p/2}\mathrm{d}x\right)^{1/p} \qquad (27)$$

证明 步骤同定理2，从略。

对于非线性退缩椭圆组

$$-D_\alpha(A_i^\alpha(x,u,\nabla u))=b_i(x,u,\nabla u) \qquad (13)'$$

若以椭圆性条件

$$A_i^\alpha(x,u,\nabla u)D_\alpha u^i\geqslant\lambda(x)|\nabla u|^2 \qquad (14)'$$

$$|A_i^\alpha(x,u,\nabla u)|\leqslant L\lambda(x)(|\nabla u|+|u|^{r/2}+|f|) \qquad (15)'$$

代替（14）和（15），对于满足条件（14）′、（15）′、（16）和（17）的非线性退缩椭圆组（13）′，定理2和定理3仍成立。

注1 当$\lambda(x)=1$时，就是M. Gaiquinta[3]已经研究过的一致椭圆组情形。

注2 若$0<\alpha<1$，则$\lambda(x)=|x_n|^\alpha\in A_2$，可见，退缩点集可以构成一个$n$-1维曲面。

参 考 文 献

1 Febes E B, Kenig C E, Serapioni R P. P.D.E. 1982, 7(1): 77～115

2 Muckenhoupt B. Trans Amer Math Soc, 1972, 165: 207～226

3 Giaquinta M. Multiple integrals in the calculus of variational and nonlinear elliptic systems, Princeton University press. 1983. 136～158

L^P-Estimates for the Gradient of Weak Solutions to a Class of Degenerate Nonlinear Systems

Chen Baoyao Lin Changhao*

Abstract We prove that, when $\lambda(x)\in A_2$, the ball average value $\lambda(B_R)$ of $\lambda(x)$ satisfies:

$$C_1R^{\frac{2r}{r-2}}\leqslant\lambda(B_R)\leqslant C_2R^n \qquad \frac{2n}{n-1}<r\leqslant\frac{2n}{n-2} \qquad C_1>0;$$

and extend the concept of critical imbedding exponent to the weighted Sobolev space. We obtain the L^p-estimates for the gradient of weak solutions of degenerate elliptic systems.

Keywords degenerate elliptic system, L^p-estimates for the gradient of weak solution, muckenhoupt weight function.

* Department of Mathematics