

# 后屈曲立管在周期流作用 下振动特性预测方法

孙明光

(应用力学与工程系)

## 摘 要

分析研究在波与流扰动下的后屈曲立管运动,导出了单模运动的非线性方程,利用周期倍化分叉方法、Melnikov法以及直接求时域解方法,讨论了亚谐振发生的条件及流与波的影响,获得混沌及亚谐振发生的波幅/阻尼比的阈值,不同方法估计的阈值是基本一致的。

**关键词** 分叉, 谐振, 混沌, 立管

文[1]讨论了立管在流作用下的多参数分叉,另文还讨论了屈曲立管在波浪作用下的谐振、跳跃现象及混沌振动<sup>1)</sup>。本文将讨论后屈曲立管在波与流共同作用下的运动,出现的现象比前文<sup>1)</sup>所讨论的情形更复杂。

## 1 基本方程

考虑一后屈曲立管由于波与流共同作用而振动,如图1所示

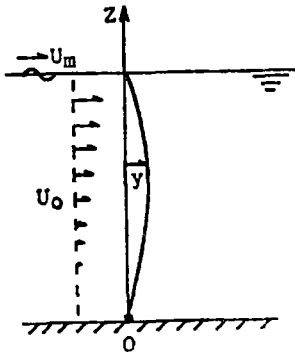


图1 立管的计算模型

Fig. 1 Computational model of a Riser

设立管自重为 $We$ ,长为 $L$ ,下端有效张力为 $P_{e0}$ ,立管在波与流共同作用平面内作弯曲振动,则位移 $y$ 将满足如下方程<sup>[2]</sup>

本文1989年9月12日收到

国家自然科学基金资助项目

1) 孙明光, 屈曲后立管在周期流作用下的振动, 第二届全国近代数学与力学讨论会文集, 1987, 12, 上海

$$\begin{aligned}
 & m y_{tt} + \bar{c} y_t + E I y_{zzzz} - [(W e Z + P e o) y_z]_z + \frac{1}{2} E I (y_{zz} y_z^2)_{zz} - \frac{1}{2} [(W e Z + P e o) y_z^3]_z \\
 & - \frac{1}{2} E I (y_{zz}^2 y_z)_z = \rho A U_t + C_1 \rho A (U_t - y_{tt}) + \frac{1}{2} \rho |U - y_t| (U - y_t) D C_D \quad (1)
 \end{aligned}$$

其中,  $t$  为时间,  $Z$  为沿直高度,  $E$  为杨氏模量,  $I$  为横截面积矩,  $m$  为单位长立管质量,  $C_1$  为附加质量系数,  $D$  为横截面直径,  $A$  为横截面积,  $C_D$  为阻力系数,  $\rho$  为水密度,  $\bar{c}$  为阻尼系数,  $U$  为流速。

在波与流作用下, 来流速度可写为如下形式

$$U = U_0 + U_m(Z) \sin \omega t \quad (2)$$

当  $U_0 = 0$  时, 就成为单纯波浪作用情形。

设流速较大, 并引入无量纲量:  $Y = y/L$ ,  $Z = z/L$ ,  $\mu = W e L^3/EI$ ,  $\lambda = P e o L^2/EI$ ,  $c = (\bar{c} + \rho D C_D U_0) \omega_0 L^4/EI$ ,  $\tau = \omega_0 t$ ,  $M = (m + C_1 \rho A) \omega_0^2 L^4/EI$ ,  $\gamma = \rho D C_D U_0^2 L^3/2EI$  (其中  $\omega_0$  为特征频率), 则 (1) 可写为近似的无量纲形式

$$\begin{aligned}
 & M Y_{\tau\tau} + c Y_{\tau} + Y_{zzzz} - [(\mu z + \lambda) Y_z]_z + \frac{1}{2} (Y_{zz} Y_z^2)_{zz} - \frac{1}{2} [(\mu z + \lambda) Y_z^3]_z \\
 & - \frac{1}{2} (Y_{zz}^2 Y_z)_z = \gamma + \beta \sin(\nu \tau + \varphi) \quad (3)
 \end{aligned}$$

其中  $\beta = [(C_m A \omega)^2 + (D C_D U_0)^2]^{\frac{1}{2}} \frac{\rho L^3 U_m}{EI}$ ,  $C_m = 1 + C_1$

$$\varphi = \arctg(C_m A \omega / D C_D U_0), \nu = \omega / \omega_0$$

为简单起见, 边界条件只讨论两端简支情形

$$Y(0) = 0 = Y_{zz}(0) \quad (4)$$

$$Y(1) = 0 = Y_{zz}(1) \quad (5)$$

## 2 立管的运动

对于固定的  $\mu$ , 设立管处于第一屈曲模态, 在波与流共同作用下立管产生振动, 因而产生附加的端部压力, 使  $\lambda$  在  $\lambda_1$  附近变化并小于  $\lambda_1$  的值。

设立管  $n$  阶屈曲模态为  $\phi_n(z)$ , 满足方程

$$\phi_{nzzzz} - [(\mu \lambda + \lambda_n) \phi_{nz}]_z = 0 \quad (6)$$

及边界条件:  $\phi_n(0) = 0 = \phi_{nzz}(0)$ ,  $\phi_n(1) = 0 = \phi_{nzz}(1)$ 。

将立管在振动时的位移写为

$$Y = \sum_{n=1}^{\infty} \phi_n(z) q_n(\tau) \quad (7)$$

以下仅考虑一阶模态, 则

$$Y = \phi_1 q_1 \quad (8)$$

将 (8) 代入 (3), 并利用 (6), 则有

$$M \phi_1 q_{1\tau\tau} + c \phi_1 q_{1\tau} + (\lambda_1 - \lambda) \phi_1 q_1 + q_1^3 \left\{ \frac{1}{2} (\phi_{1zz} \phi_{1z}^2)_{zz} - \frac{1}{2} [(\mu z + \lambda) \phi_{1z}^3]_z \right\}$$

$$-\frac{1}{2}(\phi_{1zz}^2\phi_{1z})_z = \gamma + \beta \sin(\nu\tau + \varphi) \tag{9}$$

将上式两边乘上 $\phi_1$ , 并从0到1对 $z$ 积分, 得<sup>[1]</sup>

$$Mq_{1\tau\tau} + cq_{1\tau} + (\lambda_1 - \lambda)q_1 - (\lambda_1 - \lambda)q_1^3 = \bar{\gamma} + \bar{\beta} \sin(\nu\tau + \bar{\varphi}) \tag{10}$$

其中  $\alpha^2 = \int_0^1 \phi_1^2 dz, \bar{\beta} \alpha^2 = \left[ \left( \int_0^1 \beta \phi_1 \cos \varphi dz \right)^2 + \left( \int_0^1 \beta \phi_1 \sin \varphi dz \right)^2 \right]^{\frac{1}{2}},$   
 $\bar{\gamma} \alpha^2 = \int_0^1 \gamma \phi_1 dz, \bar{\varphi} = \arctg \left( \int_0^1 \beta \phi_1 \sin \varphi dz / \int_0^1 \beta \phi_1 \cos \varphi dz \right).$

我们定义 $\omega_0$ 为

$$\omega_0 = [(\lambda_1 - \lambda)EI / (m + \rho AC_1)L^4]^{\frac{1}{2}}$$

由上式可知  $M = \lambda_1 - \lambda$ , 因而(10)变为

$$q_{1\tau\tau} + c^*q_{1\tau} + q_1 - q_1^3 = \gamma^* + \beta^* \sin(\nu\tau + \bar{\varphi}) \tag{11}$$

其中  $c^* = c/M, \gamma^* = \bar{\gamma}/M, \beta^* = \bar{\beta}/M.$

在波流干扰不强的情形, 下列近似解是足够的

$$q_1 = c_0 + c_1 \sin(\nu\tau + \psi) \tag{12}$$

将(12)代入(11), 并分离常数项、 $\sin(\nu\tau + \psi)$ 项及 $\cos(\nu\tau + \psi)$ 项, 可得

$$c_0^3 - c_0 + \frac{3}{2}c_0 c_1^2 + \gamma^* = 0 \tag{13}$$

$$c_1 - c_1 \nu^2 - 3 c_0^2 c_1 - \frac{3}{4} c_1^3 = \beta^* \cos(\bar{\varphi} - \psi) \tag{14}$$

$$c_1 c^* \nu = \beta^* \sin(\bar{\varphi} - \psi) \tag{15}$$

在图2中, 示出了 $c_0$ 及 $c_1$ 的数值计算结果的例子, 其中 $\gamma^* = 0.2, c^* = 0.01, \beta^* = 0.001$ 及 $0.0066$ . 我们仅关心其中曲线(2).

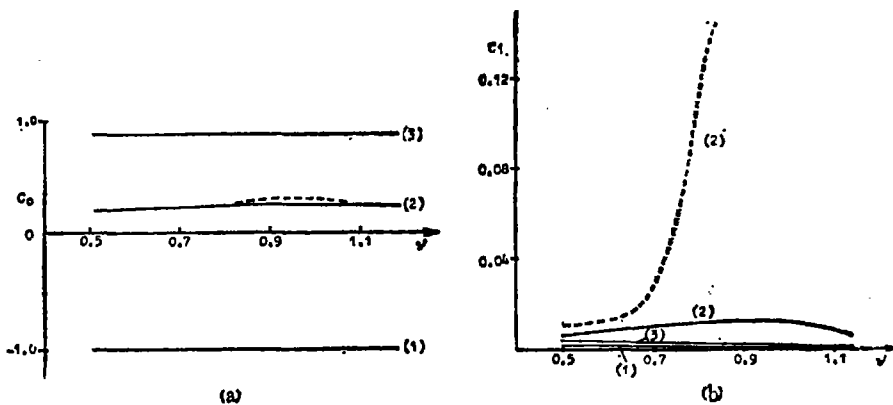


图2  $c_0(\nu)$ 及 $c_1(\nu)$ 曲线  
 Fig. 2 Curves  $c_0(\nu)$  and  $c_1(\nu)$   
 (a) Curves  $c_0(\nu)$ , (b) Curves  $c_1(\nu)$   
 $\beta^* = 0.001$  —,  $\beta^* = 0.0066$  - - -

由方程组 (13)、(14) 及 (15) 可知, 波与流共同作用产生的情形, 比单纯波或流的作用要复杂得多, 方程组可能存在 1 至 9 个解等多种情形。

现讨论解 (12) 的稳定性, 为此考虑摄动解

$$\tilde{q}_1 = q_1 + \delta q^{(1)} \tag{16}$$

将 (16) 代入 (11), 并略去高阶项后, 可得

$$\delta q_{\tau\tau}^{(1)} + c^* \delta q_{\tau}^{(1)} + \delta q^{(1)} (\lambda_0^* + \lambda_1^* \sin s + \lambda_2^* \cos 2s) = 0 \tag{17}$$

其中,  $\lambda_0^* = 1 - 3c_0^2 - \frac{3}{2} c_1^2, \lambda_1^* = -6c_0c_1$

$$\lambda_2^* = \frac{3}{2} c_1^2, S = \nu\tau + \phi \tag{18}$$

在方程 (17) 中, 由于  $\lambda_0^*$  与  $\lambda_2^* \cos 2s$  项的存在, 根据 Matheu 不稳定性理论<sup>[3]</sup>, 当  $\nu$  接近  $\sqrt{\lambda_0^*}$  时, 可能发生亚谐振。类似的, 由于  $\lambda_0^*$  与  $\lambda_1^* \cos s$  的存在, 当  $\nu/2$  接近于  $\sqrt{\lambda_0^*}$  时, 也可能发生亚谐。前者发生亚谐振条件是

$$(\lambda_0^* - \nu^2)^2 + c^{*2} \nu^2 - \frac{1}{4} \lambda_2^{*2} < 0 \tag{19}$$

后者发生亚谐振条件是

$$(\lambda_0^* - \nu^2/4)^2 + c^{*2} \nu^2/4 - \frac{1}{4} \lambda_1^{*2} < 0 \tag{20}$$

例如, 对于  $\gamma^* = 0.2, c^* = 0.01, \beta^* = 0.0066$ , 当  $\nu = 0.93$  时有  $c_0 = 0.212, c_1 = 0.175$ , 此时  $\lambda_0^* = 0.822, \lambda_1^* = -0.2226, \lambda_2^* = 0.0459$ 。可验证 (19) 满足, 但 (20) 不满足, 即仅发生频率为  $\nu$  的谐振, 而设有更低频的谐振。

又如当  $\nu = 0.7$  时,  $c_0 = 0.209$  及  $c_1 = 0.017$ , 此时  $\lambda_0^* = 0.8686, \lambda_1^* = -0.0213$  及  $\lambda_2^* = 0.0004$ , 可验证 (19) 及 (20) 均不满足, 即无任何共振, 解 (12) 是稳定的。

利用 Runge-kutta 方法, 直接计算方程 (11) 在  $\nu = 0.93$  时的时域解 (图 3)。显然, 此时解是不稳定的, 但没有  $\nu/2$  亚谐振出现。此与上述方法的估计是一致的。利用 Poincare Map 的 4 点方法<sup>[4]</sup>, 也可证明此时特征值实部为正, 解不稳定。

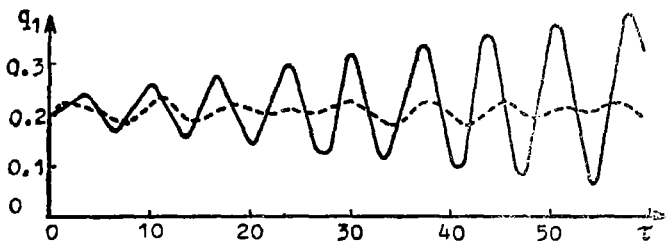


图 3  $q_1(\tau)$  的曲线

Fig. 3 Curves  $q_1 \sim \tau$

—  $\nu = 0.93, - - - \nu = 0.7$

类似的,  $\nu=0.7$ 时, (11) 的时域解同时示于图 3, 此时解是稳定的. 与前面结论是一致的. 利用Poin care Map的4点方法也得到一致结果. 因此, 利用这种亚谐振不断发生, 即周期倍化分叉过程, 可以预估非线性方程解的一系列特性<sup>[6]</sup>, 但由于 $\lambda_0 < 1$ 的限制, 故预估的范围可以在 $\nu$ 小于 2 之内. 为了对更大的 $\nu$ 范围的解特性有所了解, 并与上述结果加予比较, 我们下面再利用Melnikov方法研究方程 (11) 的解的性质<sup>[6]</sup>.

由Melnikov方法计算的阈值曲线 (图 4). 当 $\frac{\beta^*}{c^*} > R^{(0)}(\nu)$ 时, 系统可能产生混沌振动. 当 $\frac{\beta^*}{c^*} > R^{(m, n)}(\nu)$ 时, 系统可能产生 $\frac{m}{n}$ 阶亚谐振. 当 $\frac{\beta^*}{c^*} > R^m(\nu)$ , 系统可能产生 $m$ 阶亚谐振.

由图 4 可以看出, 对于 $\nu=0.93$ ,  $\beta^*/c^* > 0.7$ 时将可能出现  $m=1$  的共振, 这里的阈值 $0.7$ 比前面计算的 $\beta^*/c^* = 0.0066/0.01 = 0.66$ 稍高, 但相当接近, 而要产生 $\frac{1}{2}$ 亚谐振, 由图 4 知,  $\beta^*/c^*$ 需大于 $0.8$ , 因而当  $\beta^*/c^* = 0.66$ 时不出现 $\frac{1}{2}$ 亚谐振, 这与前面估计是一致的.

又如 $\nu=0.7$ 时, 由图 4 知需有 $\beta^*/c^* > 0.98$ 才能产生 $m=1$ 共振, 这个值比 $0.66$ 大得多, 因而当 $\nu=0.7$ 时, 不出现共振, 解是稳定的, 这个估计也与前面的结果一致. 但用前述的亚谐振分叉方法估计的 $\nu$ 范围, 如对于  $m=1$ 共振为 2, 而用Melnikov 方法估计的 $\nu$  值为 $2.6$ , 要大一些.

由图 4 可以得到在不同的强迫频率下, 改变来波 (或流) 振幅 $\beta^*$ , 或改变阻尼 $c^*$ , 所产生的亚谐振及混沌振动的过程.  $\beta^*$ 越大越容易混沌化.

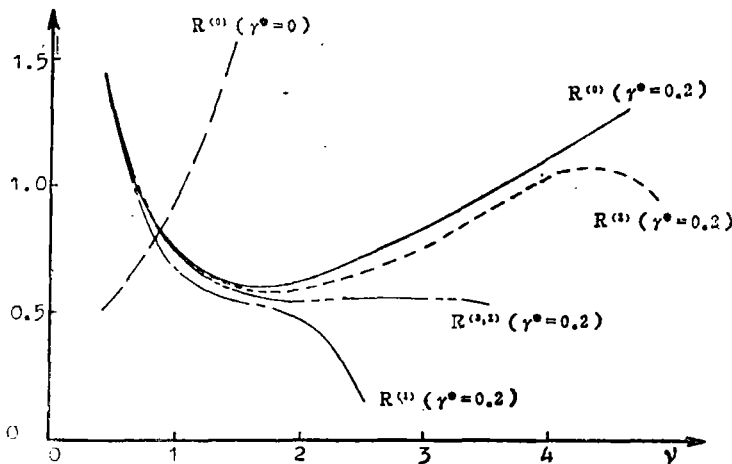


图 4  $R^{(0)}(\nu)$ 和 $R^{(m, n)}(\nu)$ 曲线  
Fig. 4 Curves  $R^{(0)}(\nu)$  and  $R^{(m, n)}(\nu)$

### 3 实验<sup>1)</sup>

在中山大学水池进行立管的模型试验, 整个装置附连于拖车下, 立管直径 14mm,

1) 孙明光等, 中山大学水池实验报告. 1989

长1.84m。

试验时立管运动由水下录像,顶部张力由拉力计测量,波浪由浪高仪记录。

试验的结果与上述结果定性相符。在波振幅增大时(从0.1m增大到0.2m),观察到 $\frac{1}{2}$ 亚谐振及更高阶谐振。而当流速增大时,除了偏离增大外,其他影响不容易分离,尚需进一步研究。

#### 4 结 语

(1)用亚谐振分叉、或Melnikov方法,或直接求时域解方法,来预估解的特性,其结果是基本一致的。但亚谐振分叉方法只估计周期倍化分叉的结果,而Melnikov方法可估计任意的 $m$ 阶亚谐振。

(2)当来流 $\gamma^*$ 较大时,此时难以使用Melnikov方法。同时,当来波振幅 $\beta^*$ 及阻尼 $c^*$ 不是小量时,也不能用Melnikov方法。但此时可用亚谐振分叉或直接求时域解方法。当 $\gamma^*$ 足够大,使得 $\lambda_0^*$ 为负值时,亚谐振分叉方法也不能应用,只能直接求时域解。

(3)对不同的来波振幅或阻尼,在同一强迫频率下,其产生亚谐振及混沌过程的次序是不同的(见图4)。来波振幅越大,越容易混沌化。

(4)在图4中,同时示出了无流情形( $\gamma^*=0$ )的 $R^{(0)}(\nu)$ 曲线,可见有流与无流二者谐振是极不相同的。

#### 参 考 文 献

- 1 孙明光. 中山大学学报(自然科学版), 1987, 4
- 2 孙明光. 定常流中细长立管的应力边界层, 水动力学研究与进展, 1986, 4
- 3 Berge P, Pomeau, Y Vidal C. Order within chaos, John Wiley and Sons, 1986
- 4 Virgin, L. N Appl Ocean Research, 1987, 9(2)
- 5 Szemplinska-stupnicka W, Bajkowski J. Int J Non-linear Mechanics, 1986, 21(5)
- 6 Greenspan, B D, Holmes P J. Homoclinic orbits, subharmonics and global bifurcation in forced oscillations, "Nonlinear Dynamics and Turbulence," Edited by G I Barenblatt, G Iooss and D D Joseph, 1983

### Predict of Behaviors of a Postbuckling Riser Vibrating due to Effects of Waves and Current

Sun Mingguang\*

#### Abstract

The motion of a postbuckling riser under the effects of waves and current is investigated. The nonlinear equation for single mode is given. The conditions of subharmonic resonances are discussed, and the subharmonic and homoclinic bifurcation curves in wave amplitude-damping plane are obtained by using period doubling bifurcation method, Melnikov method and numerical method in time-domain. The results by the various method are consistent each other basically.

**Keywords** bifurcation, harmonic resonance, chaos, riser

• Department of Applied Mechanics and Engineering