第30卷 第3期 中山大学学报（自然科学版） Vol.30 №.3
1991年 ACTA SCIENTIARUM NATURALIUM UNIVERSITATIS SUNYATSENI 1991

遍历测度的一个定理及其应用*

周作领 钟 洵

（计算机科学系）

摘 要

设f是紧度量空间上的连续自映射．本文证明，如果f的所有非渐近周期的非游荡点的集合的基数是可列的，则f的遍历测度是它的周期轨道原子测度，且f的拓扑熵为零．作为推论还得到，逐点周期映射有零拓扑熵．另外，当f没有周期点时，其非游荡点的集合的基数是不可列的．

关键词 非游荡集，遍历测度，拓扑熵

1 引 言

文〔1〕引进了拓扑熵的定义．估计拓扑熵的值，特别是找出拓扑熵为零的条件是动力系统理论的一个重要而又困难的问题．本文首先证明遍历测度的一个定理，然后由此证明，对于紧度量空间上的一个连续自映射，其拓扑熵为零和非渐近周期的非游荡点的集合的基数有关．作为上述结果的简单推论，证明了逐点周期映射的拓扑熵为零．

本文记(X, d)是一个紧度量空间．f是X到X的连续映射．以$P(f)$，$\Omega(f)$和$\mathrm{ent}(f)$分别记f的周期点集、非游荡集和拓扑熵．

2 预备知识和主要结果

以下参照〔2〕的记号．

记$\mathscr{B}(X)$为X的Borel子集的σ代数．$M(X)$为定义在可测空间$(X, \mathscr{B}(X))$上的所有概率测度的集合．$M(X, f)$为$M(X)$中所有对f不变的测度的集合．$E(X,f)$为$M(X, f)$中所有对f是遍历测度的集合．所以，$M(X)\supset M(X, f)\supset E(X,f)\neq\phi$．$M(X)$在弱收敛拓扑下是一个紧度量空间．$M(X, f)$是$M(X)$的一个凸紧子集．对$x\in X$，$\forall A\in\mathscr{B}(X)$，定义

$$\delta_x(A)=\begin{cases}1, & x\in A,\\ 0, & x\overline{\in} A,\end{cases}$$

则$\delta_x\in M(X)$．

本文1990年3月20日收到

* 中山大学高等学术研究中心基金会和国家自然科学基金会资助项目

定义 1　设$m\epsilon M(X)$，如果$m=\sum_{i=1}^{\infty}P_i\delta_{x_i}$，其中$x_i\epsilon(X),P_i\geqslant 0,\sum_{i=1}^{\infty}P_i=1$，则称$m$是纯原子测度。

定义 2　设$x\epsilon X$，如果存在一个$p\epsilon P(f)$，使得$\lim_{n\to\infty}d(f^n(x),f^n(p))=0$，则称$x$是$f$的渐近周期点。用$AP(f)$记$f$的所有渐近周期点集合。

以下定理是周知的。证明从略，可参见〔2〕。

定理 A　设$m\epsilon M(X)$，$m_i\epsilon M(X)$，$i>0$，则$m_i\to m$的充要条件是对X的每个开子集U，$\liminf_{i\to\infty} m_i(U)\geqslant m(U)$。

定理 B　设$N\geqslant 1$，$x\epsilon X$，则$f^N(x)=x$的充要条件是

$$\frac{1}{N}\sum_{i=0}^{N-1}\delta_{f^i(x)}\epsilon M(X,f).$$

按照定理B，f的每个周期轨道可以看作是f的不变概率测度，故有$PO(f)\subset M(X,f)$，其中$PO(f)$是f的周期轨道集合，$PO(f)$的元素称为f的周期轨道原子测度。

定理 C　设$m\epsilon M(X,f)$是纯原子的，则m是f的周期轨道原子测度的凸组合（可能是可列无穷个的组合）。

定理 D　设$m\epsilon M(X,f)$，则$m\epsilon E(X,f)$的充要条件是存在一个$Y\epsilon\mathscr{B}(X)$，$m(Y)=1$，$\forall x\epsilon Y$，

$$\frac{1}{n}\sum_{i=0}^{n-1}\delta_{f^i(x)}\longrightarrow m.$$

定理 E　$\mathrm{ent}(f)=\sup\{h_m(f)|m\epsilon M(X,f)\}=\sup\{h_m(f)|m\epsilon E(x,f)\}$，其中$h_m(f)$为$f$关于$m$的测度熵。这个定理称为变分原理。

以下是本文的主要结果。

定理 1　当$\Omega(f)-AP(f)$是可列集时，$E(X,f)=PO(f)$。

推论 1　当$\Omega(f)-AP(f)$是可列集时，$\mathrm{ent}(f)=0$，特别地，当$X=P(f)$，即f为逐点周期映射时，$\mathrm{ent}(f)=0$。

推论 2　当$P(f)=\phi$时，$\Omega(f)$是不可列集。

3　定理的证明

首先证明 4 个引理

引理 1　当$m\epsilon PO(f)$时，$h_m(f)=0$。

这是测度熵定义[2]的直接结果。

引理 2　设$x\epsilon AP(f)$，即存在一个周期为$N>0$的$p\epsilon P(f)$，使得$\lim_{n\to\infty}d(f^n(x),f^n(p))=0$，则

$$\frac{1}{n}\sum_{i=0}^{n-1}\delta_{f^i(x)}\longrightarrow\frac{1}{N}\sum_{i=0}^{N-1}\delta_{f^i(p)}.$$

证明 对X的任一开子集U和使得极限$\lim \frac{1}{n_K}\sum_{i=0}^{n_K-1}\delta_{f^i(x)}(U)$存在的任一序列

$n_1 < n_2 < \cdots < n_K < \cdots$，易证

$$\lim \frac{1}{n_K}\sum_{i=0}^{N_K-1}\delta_{f^i(x)}(U) \geqslant \frac{1}{N}\sum_{i=0}^{N-1}\delta_{f^i(p)}(U).$$

由定理A得证本引理。

引理 3 设$p\in P(f)$的周期为$N>0$，则

$$\frac{1}{n}\sum_{i=0}^{n-1}\delta_{f^i(p)} \longrightarrow \frac{1}{N}\sum_{i=0}^{N-1}\delta_{f^i(p)} \quad .$$

显然这是引理 2 的直接推论。

引理 4 设$m\in M(X,f)$。如果存在$Y\in\mathscr{B}(X)$，$m(Y)=1$且Y是可列集，则m是纯原子测度。

证明 由于度量空间中单点集是闭集，所以$\{x\}\in\mathscr{B}(X)$。$\forall x\in Y$，令$m(\{x\})=P_x$，则$0\leqslant P_x\leqslant 1$，由测度的基本性质易知，$m=\sum_{x\in Y}P_x\delta_x$，其中$\sum_{x\in Y}P_x=1$。即$m$是纯原子测度。

定理 1 的证明 设$p\in P(f)$的周期为$N>0$令$m=\frac{1}{N}\sum_{i=0}^{N-1}\delta_{f^i(p)}$，则

$m\left(\left\{p,f(p),\cdots,f^{N-1}(p)\right\}\right)=1$，且$m\in M(X,f)$。由定理D和引理3，易见$m\in E(X,f)$。这就证明了$PO(f)\subset E(X,f)$。往证$PO(f)\supset E(X,f)$。设$m\in E(X,f)$。由定理D，存在$Y\in\mathscr{B}(X)$，$Y\subset\Omega(f)$，且$m(Y)=1$，使得$\forall x\in Y$，$\frac{1}{n}\sum_{i=0}^{n-1}\delta_{f^i(x)}\longrightarrow m$。可以肯定$Y\cap AP(f)\neq\phi$。假设其不然，$Y\cap AP(f)=\phi$，则$Y\subset\Omega(f)-AP(f)$是可列集。由引理4，$m$是纯原子测度，即$m=\sum_{i=1}^{\infty}P_i\delta_{x_i}$，其中$x_i\in Y$，$p_i\geqslant 0$，$\sum_{i=1}^{\infty}P_i=1$。由定理C，每个$x_i$是周期点，这就与$Y\subset\Omega(f)-AP(f)$矛盾。从而证明了$Y\cap AP(f)\neq\phi$。现在取$x\in Y\cap AP(f)$，使得$\frac{1}{n}\sum_{i=0}^{n-1}\delta_{f^i(x)}\longrightarrow m$。由引理 2，易见$m\in PO(f)$。定理得证。

推论 1 是定理 1，引理 1 和定理 E 的结果。当$X=P(f)$时，显然$X=AP(f)$，即$X-AP(f)=\phi$，故$\mathrm{ent}(f)=0$。

推论 2 的证明 考虑限制映射$f|_{\Omega(f)}:\Omega(f)\to\Omega(f)$。
如果$\Omega(f)$是可列集，由引理 4，则每个$m\in M(\Omega(f), f|_{\Omega(f)})$是纯原子测度按定理 C，$m$是周期轨道原子测度的凸组合，这与$PO(f)=\phi$矛盾。

值得注意，推论 1 的逆命题不成立。考虑下面的反例。设$g: s^1\to s^1$是无周期点的圆周连续自映射(这样的映射是存在的)，$\mathrm{ent}(g)=0$。但由推论2，$\Omega(g)-AP(g)=\Omega(g)$是不可列的。

参考文献

1 Adler R L, Konheim A G, Mcandrew M H. Trans Amer Math Soc, 1965; 114: 309～319

2 Walters P. An introduction to ergodic thory. Springer: New York, 1982

A Theorem on Ergodic Measures and Its Applications

Zhou Zuoling Chung Shung

Abstract

Let f be a continuous self-map on a compact metric space. We prove that if the cardinality of the set of all nonwandering points of f which are not asymptotically periodic is countable, then its every ergodic measure is its periodic orbit atomic measure and its topological entropy vanishes. As a consequence, we get that, each pointwise periodic map has zero topological entropy. We also prove that if f has no peirodic point, then its nonwandering set is uncountable.

keywords nonwandering set, ergodic measure, topoloyical engropy

• Department of Computer Science