第32卷 第3期 1993年
中山大学学报（自然科学版）
ACTA SCIENTIARUM NATURALIUM UNIVERSITATIS SUNYATSENI
Vol.32 №.3 1993

# Banach空间中的一类非光滑最优化问题的算法*

王 大 麒
（中山大学数学系）

**摘 要** 提供Banach空间中一类非光滑最优化问题的4个光滑算法，而且给出了每个算法的收敛速度和判别准则，还讨论它们在模糊优化中的应用．

**关键词** 非光滑最优化，光滑算法，Banach空间

关于非光滑问题，文献[1]用次可微概念，[2]用广义梯度概念，引出算法，二者代表同一思路；本文用转化和逼近的思路，引出非光滑最优化问题算法．

## 1 本文符号、假设和研究的问题

### 1.1 符 号

设$(D,d)$是度量空间，$D\subset X$，$f,g_1,\cdots,g_m:X\to R^1$（数直线），$\bar{A}$表集$A$的闭包，

$g(x)=\min\{g_1(x),\cdots,g_m(x)\}(x\in X)$，$F(x)=\min\{f(x),g(x)\}(x\in X)$，

$M=\max\{F(x)|x\in D\}$，$M_1=\max\{f(x)|x\in D\}$，$M_2=\max\{g(x)|x\in D\}$，

$m=\min\{g(x)|x\in D\}$，$\Delta_0=M_0-m(M_0\geqslant M_2)$，$D_2=D-D_1$，

$D_1=\{x|x\in D,f(x)\leqslant g(x)\}$，$\lambda_1=\max\{f(x)|x\in D_1\}$，$\lambda_2=\sup\{g(x)|x\in D_2\}$，

$D(\lambda)=\{x|x\in D,g(x)\geqslant\lambda\}$，$\varphi(\lambda)=\max\{f(x)|x\in D(\lambda)\}$，$E(\lambda)=\{x|x\in D,$
$g(x)>\lambda\}$，

$D^*(\lambda)=\{x|x\in D(\lambda),\ f(x)=\varphi(\lambda)\}$，$D^*(f)=\{x|x\in D,\ f(x)=M_1\}$，

$D_1^*(f)=\{x|x\in D_1,\ f(x)=\lambda_1\}$，

$\delta_1(\lambda,\lambda_0)=\sup\{d(x,D(\lambda_0))|x\in D(\lambda)\}$，$\delta_1(\lambda_0,\lambda)=\sup\{d(x,D(\lambda))|x\in D(\lambda_0)\}$，

$\delta_2(\lambda,\lambda_0)=\sup\{d(x,D(\lambda_0))+d(x,D(\lambda))|x\in D(\lambda)\cup D(\lambda_0)\}$，

$\delta^*(\lambda,\lambda_0)=\sup\{d(x,D^*(\lambda_0))|x\in D^*(\lambda)\}$，$I=\{1,2,\cdots,m\}$．

### 1.2 假 设

假设Ⅰ 设$(D,d)$是Banach空间$(X,\|\cdot\|)$中的紧集$D$构成的度量空间，$d(x,y)=$

---

本文1989年10月16日收到，修改稿于1993年3月30日收到
* 国家自然科学基金和国家教委博士点基金资助项目

$\|x-y\|$，$f,g_1,\cdots,g_m:X\to R^1$，连续，在$D$上处处有梯度，且

$$m=\min\{g(x)\mid x\epsilon D\}=\min\{f(x)\mid x\epsilon D\}=\min\{g_1(x)\mid x\epsilon D\}$$
$$=\cdots=\min\{g_m(x)\mid x\epsilon D\}.$$

假设Ⅱ $\lambda_1>g(x)\quad(x\epsilon D_2)$.

假设Ⅲ $\lambda_1>f(x)\quad(x\epsilon D_2)$.

假设Ⅳ $g$具有性质：$\delta_2(\lambda,\lambda^*)\to 0\ (\lambda\to\lambda^*,\lambda\epsilon(-\infty,M_2])$.

假设Ⅴ $\exists x_1\epsilon D_1$，使$g(x_1)>g(x)(x\epsilon D_2)$.

### 1.3 问题

问题Ⅰ 非光滑问题

$\max\limits_{x\epsilon D}F(x)$，其解集记为$D^*$.

问题Ⅱ 光滑问题

$$\begin{cases}\max\ \lambda\\ s.t.\ f(x)-\lambda\geqslant 0\\ \qquad g_i(x)-\lambda\geqslant 0\quad(i\epsilon I)\end{cases}$$，其解集记为$(D_1^*,\lambda^*)$.

问题Ⅲ 光滑问题

$$\begin{cases}\max\ f(x)\\ s.t.\ g_i(x)\geqslant\lambda(i\epsilon I)\end{cases}$$，其解集记为$D^*(\lambda)$.

问题Ⅳ 光滑问题

$\max\limits_{x\epsilon D}f(x)$，其解集记为$D^*(f)$.

## 2 非光滑问题Ⅰ的算法

下面所说的是把非光滑问题Ⅰ转化为光滑问题Ⅱ、Ⅲ和Ⅳ的算法.

### 2.1 满足假设Ⅰ的一般性算法

(1)算法Ⅰ：把非光滑问题Ⅰ转化为光滑问题Ⅱ的算法.

求问题Ⅱ的解$(x^*,\lambda^*)\epsilon(D_1^*,\lambda^*)$.

(2)算法Ⅱ：把非光滑问题Ⅰ转化为光滑问题序列

$$\begin{cases}\max\ f(x)\\ s.t.\ g_i(x)\geqslant\lambda_k(i\epsilon I),\ k=1,2,\cdots\end{cases}\qquad(\mathrm{III}_k)$$

的算法.

① 取$\Delta_0=M_0-m(M_0\geqslant M_2)$，$\Delta_k=2^{-k}\Delta_0(k=1,2,\cdots)$，$\lambda_1=m+2^{-1}\Delta_0$

② 当得到$\lambda_k$后求问题$(\mathrm{III}_k)$的解$x_k^*$.

③ 1) 若$\lambda_k=f(x_k^*)$，令$\lambda^*=\lambda_k^*$，$x^*=x_k^*$，停机，打印；

2) 若$\lambda_k<f(x_k^*)$，令

$$\lambda_{k+1}=\lambda_k+\Delta_k \quad (k=1,2,\cdots),$$

$\lambda_k:=\lambda_{k+1}$，去到②；

3) 若$\lambda_k>f(x_k^*)$，或问题(Ⅱ$_k$)无解，令

$$\lambda_{k+1}=\lambda_k-\Delta_k \quad (k=1,2,\cdots),$$

$\lambda_k:=\lambda_{k+1}$，去到②；

4) 若$g(x_{k0}^*)=\lambda_{k0}$，且$\lambda_k\downarrow(k>k_0+1)$，令

$$\lambda^*=\lambda_{k0},\ x^*=x_{k0}，停机，打印。$$

**2.2 满足假设Ⅰ和其它条件的特殊算法**

(1)算法Ⅱ：满足假设Ⅰ和Ⅱ时，非光滑问题Ⅰ转化为光滑问题序列(Ⅱ$_k$)的特殊算法。

把算法Ⅰ中删去③4)，其余不动，就是算法Ⅱ。

(2)算法Ⅳ：满足假设Ⅰ和Ⅲ时，非光滑问题Ⅰ转化为光滑问题Ⅳ的算法。

求问题Ⅳ的解$x^*\epsilon D^*$。

〔注〕(1)算法Ⅰ比Ⅱ、Ⅲ、Ⅳ增加了一个参变量$\lambda$。

(2)算法Ⅰ、Ⅱ、Ⅳ依次从复杂变为简单，若对算法的条件已检验清楚，自然选取最简单的算法最好。

# 3 算法判别

**3.1 算法Ⅰ和Ⅱ判别**

算法Ⅰ和Ⅱ仅需满足假设Ⅰ，而假设Ⅰ可按通常的连续性和紧性检验方法检验。

**3.2 算法Ⅲ判别**

算法Ⅲ要求满足假设Ⅰ和Ⅱ．假设Ⅱ一般不容易直接验证，下面定理1和2给出充分条件。

**定义** $f:D\to R^1$称为$W$-凹的，是指$D$是凸集，$\forall x,\ y\epsilon D$ 满足：1) $f((1-\alpha)x+\alpha y)\geqslant\min\{f(x),\ f(y)\}$；2) 若$f(x)\neq f(y)$，有$f((1-\alpha)x+\alpha y)>\min\{f(x),f(y)\}$。

若$(-f)$是$W$-凹的，称$f$是$W$-凸的。

显然，凹(凸)泛函是$W$-凹(凸)的。

**引理1** 若$g_i:D\to R^1(i\epsilon\mathrm{I})$在$D$上连续，则$g(x)=\min\{g_i(x)|i\epsilon\mathrm{I}\}$ $(x\epsilon D)$在$D$上连续。

**证明** $\forall x\epsilon D$，$\forall\varepsilon>0$，由$g_i(i\epsilon\mathrm{I})$在$x$连续，知存在邻域$0(x)$，使$y\epsilon0(x)$时，有

$$|g_i(y)-g_i(x)|<\varepsilon(i\epsilon\mathrm{I}) \tag{1}$$

设$g(x)=g_i(x)$，$g(y)=g_j(y)$ $(i,\ j\epsilon\mathrm{I})$。由(1)有

$$|g(y)-g(x)|\leqslant\max\{|g_i(y)-g_i(x)|,\ |g_j(y)-g_j(x)|\}<\varepsilon.$$

即$g$在$x$处连续，由$x\epsilon D$是任意的，知$g$在$D$上连续。

**引理2** 若$g_i:D\to R^1(i\epsilon\mathrm{I})$是$W$-凹的，则$g(x)=\min\{g_i(x)|i\epsilon\mathrm{I}\}(x\epsilon D)$是$W$-凹的。

**证明** $\forall x,y\epsilon D$。设$g(x)=g_i(x)$，$g(y)=g_j(y)$，$g((1-\alpha)x+\alpha y)=g_k((1-\alpha)x$

$+\alpha y)$，$i,j,k\in\mathrm{I}$。由$g_i(i\in\mathrm{I})$是$W$-凹的，有 1) $g((1-\alpha)x+\alpha y)=g_k((1-\alpha)x+\alpha y)\geqslant \min\{g_k(x),g_k(y)\}\geqslant\min\{g(x),\ g(y)\}$；2)当$g(x)\neq g(y)$时，若$g_k(x)=g_k(y)$则由1)有$g((1-\alpha)x+\alpha y)\geqslant\min\{g_k(x),\ g_k(y)\}=g_k(x)>\min\{g(x),\ g(y)\}$，若 $g_k(x)\neq g_k(y)$则由1)有$g((1-\alpha)x+\alpha y)=g_k((1-\alpha)x+\alpha y)>\min\{g_k(x),g_k(y)\}\geqslant\min\{g(x),\ g(y)\}$，即$g$是$W$-凹的。

**定理1** 在假设Ⅰ和Ⅴ下，有

(i) 若 $\lambda^*=M=M_2$，则假设Ⅱ成立；

(ii) 若 $\delta_2(\lambda,\lambda_2)\to 0\ (\lambda\to\lambda_2)$，或$\delta_2(\lambda,\lambda^*)\to 0\ (\lambda\to\lambda^*)$，则假设Ⅱ成立；

(iii) 若 $D(\lambda_2)=\bar{E}(\lambda_2)$，或$D(\lambda^*)=\bar{E}(\lambda^*)$，则假设Ⅱ成立；

(iv) 若 $D(\lambda)=\bar{E}(\lambda)\,(\lambda\in[m,M_2])$，则假设Ⅱ成立；

(v) 若 $X$是Hilbert空间$g$在$D$上的相对极大值均相等，而在$D$上的任一非相对极大值点$x$，均存在$\varepsilon\in(0,1)$和$v\in X$，使$x+\alpha v\in D(\alpha\in(0,\varepsilon])$，且

$$(\mathrm{grad}\,g_i(x),v)>0\ (i\in\mathrm{I}(x)),$$

其中$(\cdot,\cdot)$表内积，$I(x)=\{i\,|\,i\in I,g_i(x)=g(x)\}$，则假设Ⅱ成立；

(vi) 若 $g_1,g_2\cdots,g_m$是凸紧集$D$上的$W$-凹泛函，则假设Ⅱ成立；

系1 若 $g_1,g_2,\cdots,g_m$是线性的，则假设Ⅱ成立；

系2 若 $g_1,g_2,\cdots,g_m$是凹泛函，则假设Ⅱ成立。

**证明** (i)由假设Ⅴ成立推出$M_2>g(x)(x\in D_2)$，又 $M_2=M=\lambda^*$，故$F(x)$的最大值点均在$D_1$中。即$\lambda_1=M=M_2>g(x)(x\in D_2)$。

(ii) 由$\delta_2(\lambda,\lambda_2)\to0(\lambda\to\lambda_2)$推出$\varphi(\lambda)$在$\lambda_2$连续，故由假设和文[4]引理2.1知假设Ⅱ成立。而$\delta_2(\lambda,\lambda^*)\to 0\ (\lambda\to\lambda^*)$推出$\varphi(\lambda)$在$\lambda^*$连续。但 $\lambda^*=\max\{\lambda_1,\lambda_2\}$由文[4]引理2.1推出$\lambda_2\leqslant\lambda_1$。当$\lambda^*=\lambda_2=\lambda_1$时上面已证明假设Ⅱ成立；而当$\lambda^*=\lambda_1>\lambda_2$时，由$\lambda_2\geqslant g(x)(x\in D_2)$也知假设Ⅱ成立。

(iii) 由$D(\lambda_2)=\bar{E}(\lambda_2)\Rightarrow\lambda_2<M_2,D(\lambda^*)=\bar{E}(\lambda^*)\Rightarrow\lambda^*<M_2$。从而由引理1和文[4]引理2.5，知 $D(\lambda_2)=\bar{E}(\lambda_2)\Leftrightarrow\delta_2(\lambda,\lambda_2)\to 0\ (\lambda\to\lambda_2\in[m,M_2)$，$D(\lambda^*)=\bar{E}(\lambda^*)\Leftrightarrow\delta_2(\lambda,\lambda^*)\to0(\lambda\to\lambda^*\in[m,M_2))$。因而由(ii)知假设Ⅱ成立。

(iv) 因$D(\lambda)=\bar{E}(\lambda)\quad(\lambda\in[m,M_2))$包括3的情形，故假设Ⅱ成立。

(v) 由假设Ⅰ，$g_i(i\in\mathrm{I})$在$D$上处处有梯度；又由假设，在$D$上的任一非相对极大值点$x$，$\exists v\in X$，$\exists\varepsilon>0$。使$x+\alpha v\in D(\alpha\in(0,\varepsilon])$，且$(\mathrm{grad}\ g_i(x),v)>0\ (i\in\mathrm{I}\ (x))$；这推出$\exists\varepsilon_1\in(0,\varepsilon]$，使$\{x+\alpha v\,|\,\alpha\in(0,\varepsilon_1]\}\subset \mathrm{E}(g(x))$，即$x\in\bar{E}(g(x))$。这结论和$g$在$D$上的相对极大值均相等的假设与$D$紧$g$连续一起，推出$D(\lambda)=\bar{E}(\lambda)\ (\lambda\in[m,M_2)$。从而由(iv)知假设Ⅱ成立。

(vi) 由引理2知$g$是$W$-凹的，又由假设Ⅰ知存在$y\in D(M_2)$，故当$x\in D(\lambda)-\mathrm{E}(\lambda)$ $(\lambda\in[m,M_2)$时，由$D$凸和$g$是$W$-凹的知$\{(1-\alpha)x+\alpha y\,|\,\alpha\in(0,1)\subset E(\lambda)\Rightarrow x\in\bar{E}(\lambda)$。又由$D$紧$g$连续推出$D(\lambda)=\bar{E}(\lambda)(\lambda\in[m,M_2))$，故由(iv)知假设Ⅱ成立。

系1和系2 因凹泛函是$W$-凹的，而线性泛函是凹泛函，故由(vi)知系1和系2结论成立。

**定理2**　在假设Ⅰ下，有

(i)　若 $M_1 \leqslant M_2$，则假设Ⅴ成立；

(ii)　若 $\lambda_2 < M_2$，则假设Ⅴ成立；

(iii)　若 $\lambda^* < M_2$，则假设Ⅴ成立；

(iv)　$D(M_2) \subset D_1 \Leftrightarrow$ 假设Ⅴ成立。

**证明**　由假设Ⅰ知 $\exists x_1 \in D(M_2)$

(i)　因 $g(x_1) = M_2 \geqslant M_1 > g(x)\,(x \in D_2) \Rightarrow x_1 \in D_1$，即假设Ⅴ成立。

(ii)　因 $g(x_1) = M_2 > \lambda_2 \geqslant g(x)\,(x \in D_2) \Rightarrow x_1 \in D_1$，即假设Ⅴ成立。

(iii)　因 $g(x_1) = M_2 > \lambda^* = \max\{\lambda_1, \lambda_2\} \geqslant \lambda_2 \geqslant g(x)\,(x \in D_2) \Rightarrow x_1 \in D_1$，即假设Ⅴ成立。

(iv)　由 $x_1 \in D(M_2) \subset D_1 \Rightarrow g(x) = M_2 > g(x)\,(x \in D_2)$，即假设Ⅴ成立。反之，若假设Ⅴ成立，则必有 $D(M_2) \subset D_1$；若否，有 $x_2 \in D_2$ 使 $g(x_2) = M_2$，由 $M_2$ 定义知假设Ⅴ不成立。

### 3.3 算法Ⅳ判别

**定理3**　在假设Ⅰ下，若 $D^*(f) \subset D_1$，则假设Ⅲ成立。

**证明**　由 $D^*(f) \subset D_1$，推出 $\lambda_1 = M_1 > f(x)\,(x \in D_2)$，即假设Ⅲ成立。

## 4　算法收敛性

下面各定理分别论述上述各算法的收敛性与敛速估计问题。

**定理4**　(i)　在假设Ⅰ下，算法Ⅰ的解 $(x^*, \lambda^*)$ 有下面关系：$\lambda^* = M, x^* \in D_1^* = D^*$。

(ii)　在假设Ⅰ和Ⅲ下，算法Ⅳ的解 $x^*$ 有下面关系：$f(x^*) = \varphi(\lambda^*) = \lambda^* = M = \lambda_1 = M_1$，$x^* \in D^* = D_1^* = D^*(\lambda^*) = D_1^*(f) = D^*(f)$。

**证明**　由文〔4〕定理2.3的1，2和4推出。

**定理5**　在假设Ⅰ下，算法Ⅱ获得的序列 $\{\lambda_k\}$，$\{x_k^*\}$，$\{\lambda_{k_i}\} = \{\lambda_{k_i} \mid \lambda_{k_i} \in \{\lambda_k\}, \lambda_{ki} \leqslant \lambda^*\}$，$\{x_{ki}^*\} = \{x_{ki}^* \mid x_{ki}^* \in \{x_k^*\}, \lambda_{ki} \leqslant \lambda^*\}$，$\{F(x_k^*)\}$，有

① $\lambda^* = M$，　$D^* = D_1^* \supset D^*(\lambda^*) \neq \phi$。

②1)　$|\lambda_k - \lambda_{k-1}| = \Delta_k = 2^{-k}\Delta_0\,(k = 1, 2 \cdots)$；

2)　$|\lambda_k - \lambda^*| \leqslant |\lambda_k - \lambda_{k-1}| = 2^{-k}\Delta_0\,(k = 1, 2, \cdots)$；

3)　$\left| F(x_k^*) - \lambda^* \right| \leqslant |\lambda_k - \lambda^*| \leqslant 2^{-k}\Delta_0\,(k = 1, 2, \cdots)$；

4)　$d(x_{k_i}^*, D^*) \leqslant d(x_{ki}^*, D^*(\lambda^*)) \to 0\ (i \to \infty)$

③ 在 $\{x_k^*\}$ 中

1)　若 $x_{k0}^* \in \{x_k^*\}$，　满足 $\lambda_{k0} = f(x_{k0}^*)$，则

$\lambda_{k0} = \lambda^* = M$，$x^*_{k0} = x^* \in D^*(\lambda^*) \subset D^*$；

2)　若 $x_{k0}^* \in \{x_{k_0}^*\}$，满足 $\lambda_{k_0} = g(x_{k_0}^*) < f(x_{k_0}^*)$，且 $\lambda_k \downarrow (k \geqslant k_0 + 1)$，则 $\lambda_{k_0} = \lambda^*$

$=M, x_{k_0}^* = x^* \epsilon D^*(\lambda^*) \subset D^*$.

证明 ① 是文〔4〕定理1.3中数码1和2的结果。

②中1)，2)和3)由算法Ⅱ的③2)，3)推出。而4)由①和文〔4〕中的定理2.1的①推出。

③ 1) 由$D_2$的定义知当 $\lambda_{k_0}=f(x_{k_0}^*)$时，$x_{k_0}^* \epsilon D_1$，且$\lambda_{k_0}>g(x)(x \epsilon D_2)$，即假设Ⅰ成立。从而由文〔4〕定理2.3的3推出$\lambda_{k_0}=\lambda^*=M=f(x_{k_0}^*)$。

2) 当$\lambda_{k_0}=g(x_{k_0}^*)<f(x_{k_0}^*)$且$\lambda_k \downarrow (k \geqslant k_0+1)$时由$D_2$定义推出 $x_{k_0}^* \epsilon D_2$，由算法Ⅱ推出$\lambda_2=\lambda_{k_0}=g(x_{k_0}^*) \geqslant \lambda_1$。所以，$\lambda^*=M=\max\{\lambda_1, \lambda_2\}=\lambda_2=\lambda_{k_0}=g(x_{k_0}^*) \Rightarrow$ $x_{k_0}^*=x^* \epsilon D^*(\lambda^*) \subset D^*$。

**定理6** 在假设Ⅰ和Ⅳ下，算法Ⅱ所获得的序列$\{\lambda_k\}$，$\{x_k^*\}$，$\{F(x_k^*)\}$ 除定理5的结论全部成立外，还有

$$d(x_k^*, D^*) \leqslant d(x_k^*, D^*(\lambda^*)) \to 0 \ (k \to \infty) \qquad (2)$$

**证明** 本定理比定理5增加了假设Ⅳ，故除定理5的全部结论成立外，由本定理5的②2)和文〔4〕定理2.2的①知(2)成立。

**定理7** 在假设Ⅰ～Ⅱ下，算法Ⅱ所产生的序列$\{\lambda_k\}$，$\{x_k^*\}$，$\{F(x_k^*)\}$，$\{\lambda_{ki}\}=\{\lambda_{ki} \mid \lambda_{k_i} \epsilon \{\lambda_k\}, \lambda_{k_i} \leqslant \lambda^*\}$，$\{x_{ki}^*\}=\{x_{ki}^* \mid x_{k_i}^* \{x_k^*\}, \lambda_{k_i} \leqslant \lambda^*\}$.$\{f(x_{ki}^*)\}$，有

① $D^*=D_1^*=D^*(\lambda^*)-D_1^*(f), \lambda^*=M=\lambda_1=\varphi(\lambda^*)=f(x^*)(x^* \epsilon D^*)$。

② 1) $|\lambda_k-\lambda_{k-1}|=\Delta_k=2^{-k}\Delta_0 \ (k=1,2,\cdots)$；

2) $|\lambda_k-\lambda^* \leqslant |\lambda_k-\lambda_{k-1}|=2^{-k}\Delta_0 \ (k=1,2,\cdots)$；

3) $|F(x_k^*)-\lambda^*| \leqslant |\lambda_k-\lambda^*| \leqslant 2^{-k}\Delta_0 \ (k=1,2,\cdots)$；

4) $d(x_{ki}^*, D^*) \to 0 \ (i \to \infty)$；

5) $f(x_{k_i}^*) \to \lambda^* (i \to \infty)$

③ 若$x_{k_0}^* \epsilon \{x_k^*\}$，满足$\lambda_{k_0}=f(x_{k_0}^*)$，则

$$\lambda_{k_0}=\lambda^*=M=\lambda_1=\varphi(\lambda^*), x_{k_0}^* \epsilon D^*.$$

**证明** ①是文〔4〕定理2.3中3的结果。

②中1)，2)，3)，4)是定理5的结果。而5)由4)和①与$f$的连续性及紧性推出。

③由①和定理5中③1)推出。

**定理 8**　在假设Ⅰ，Ⅱ和Ⅳ下，则除定理 7 的结论全成立外，还有

$$d(x_k^*, D^*) \to 0 \ (k\to\infty) \tag{3}$$

$$f(x_k^*) \to \lambda^* (k\to\infty) \tag{4}$$

**证明**　本定理比定理 7 增加了假设Ⅳ，故除定理 7 的结论全部成立外，由定理 7 的②2)和文〔4〕定理2.2(1)知(3)成立，又由(3)，$f$ 连续性和$D$紧，推出(4)成立。

**系**　在假设Ⅰ下，用定理2中使假设Ⅴ成立的任一充分条件代替假设Ⅴ，又用定理1中使假设Ⅱ成立的任一充分条件代替代假设Ⅱ，再用文〔4〕中引理 2.5 使假设Ⅳ成立的任一条件代替假设Ⅳ，则定理 8 的结论仍成立。

## 5　在模糊最优化问题上的应用

仿〔3〕模糊优化定义，设$I_1=\{1,2,\cdots,m_1\}$，$I_2=\{m_1+1,m_1+2,\cdots,m_1+m_2\}$，$f_i:D\to R^1$，$m_i=\inf\{f_i(x)\mid x\in D\}$，$M_i=\sup\{f_i(x)\mid x\in D\}$，$i\in I_1$；$\underset{\sim}{A}j$是$D$上的模糊集，其隶属度为$\mu_j=\mu\underset{\sim}{A}j:D\to[0,1,]$，$j\in I_2$。在$D$上的$m_1$个目标和$m_2$个模糊约束的最优化问题

$$\begin{cases} \max f_1(x) \\ \quad\vdots \\ \quad fm_1(x) \\ s.t. \underset{\sim}{A}m_{1+1},\ \underset{\sim}{A}m_{1+2},\cdots,\underset{\sim}{A}m_1+m_2 \end{cases} \tag{5}$$

可定义为一个判决泛函$\mu_D:D\to[0,1]$的普通最优化问题

$$\max_{x\in D} \mu_D(x) \tag{6}$$

可用下法定义$\mu_D$：

$$\mu_D(x)=\min\{\mu_1(x),\cdots,\mu_{m_1}(x),\mu_{m_1+1}(x),\cdots,\mu_{m_1+m_2}(x)\}(x\in D),$$

其中$\mu_i(x)=(f_i(x)-m_i)(M_i-m_i)^{-1}(i\in I_1)$。令$F(x)=\mu_D(x)(x\in D)$，则(6)就是Ⅰ中的非光滑

问题Ⅰ：$\max\limits_{x\in D} F(x)$。

若按某一目的，令$m=m_1+m_2-1$，

$$f(x)=\mu_{i_0}(x)\quad(i_0\in I_1\cup I_2),$$

$$g_i(x)=\mu_i(x)\quad(i\in I_1\cup I_2-\{i_0\}),$$

则在假设Ⅰ下，有1.3中的相应光滑问题Ⅱ．Ⅲ和Ⅳ．而且有

$$m=\min\{\mu_i(x)\mid x\in D\}=0\ (i\in I_1\cup I_2) \tag{7}$$

$$M_1=M_2=\max\{\mu_i(x)\mid x\in D\}=1\ (i\in I_1\cup I_2) \tag{8}$$

这样，由定理2的(i)知假设Ⅴ恒成立。

由此可知模糊优化问题(5)实际上是假设Ⅴ恒成立的特殊问题。因此，文〔4〕和本文关于假设Ⅴ成立的一切结果和算法都是模糊优化问题(5)的结果和算法。也就是说文〔4〕和本文已为模糊优化问题提供了理论结果和算法。

## 参考文献

1 Plastria F. Journal of Optimization Theory and Applications, 1988, 57(3): 463～484

2 Clarke Optimization and Nonsmooth Analysis, New York; Wiley-Interscience, 1983

3 （日）浅居喜代治等著（赵汝怀译）. 模糊系统理论入门. 北京：北京师范大学出版社, 1982. 188～209

4 王大麒. 中山大学学报（自然科学版），1991, 30（3）：32～38

# Algorithms for a Class of Nonsmooth Optimization Probrems in Banach Space

*Wang Daqi**

**Abstract** We present four smooth algorithms for a class of nonsmooth optimization problems in Banach space. Convergence rates and criteria for each algorithm are given. We also discuss its applications in fuzzy optimization.

**Keywords** nonsmooth optimization, smooth algorithm, Banach space

*Department of Mathematics, Zhongshan University