第30卷 第4期 1991年
中山大学学报(自然科学版)
ACTA SCIENTIARUM NATURALIUM UNIVERSITATIS SUNYATSENI
Vol.30 №.4 1991

关于Hilbert空间中样条函数构造

黄友谦 韩国强
(计算机科学系)

摘 要

对一类样条，通过相应的B样条作内积运算，构造出一类新的稳定计算格式。对光顺样条也有类似结论。

关键词 B样条，光顺样条，Green函数

记X,Y,Z是实的Hilbert空间。线性有界算子T：$X\to Y$，A：$X\to Z$，并假定A，T的的值域$R(A)=Z$，$R(T)=Y$。

定义1 称$S(T,A)$或简记为$s=\{\sigma\in X:(T\sigma,Tx)y=0,\forall x\in N(A)\}$为样条空间。其中$N(A)$表示算子$A$的零空间。

样条函数空间s常常是某类极值问题的解，记$A^{-1}(z)=\{x\in X:Ax=z\}\neq 0$。如果$\sigma\in A^{-1}(z)$是下列极小值问题的解

$$\|T\sigma\|_y=\inf_{x\in A^{-1}(z)}\|Tx\|_y \tag{1}$$

我们有

$$\sigma是(1)的解\Leftrightarrow(T\sigma,Tx)y=0,\forall x\in N(A),(即\sigma\in s)\Leftrightarrow T^*T\sigma\perp N(A),\ 即\ T^*T\sigma\in R(A^*)$$
$$\Leftrightarrow\exists\lambda\in X使T^*T\sigma=A^*\lambda \tag{2}$$

引理1 设$A^{-1}(z)\neq 0$，$TN(A)$在y中闭，且$N(A)\cap N(T)=0$，则(1)的解存在且唯一。

引理2 设$N(A)\cap N(T)=0$，$N(T)+A^{-1}(z)$非空且是闭的，则(1)的解存在且唯一。

引理3 若$N(A)\cap N(T)=0$，且$\dim N(T)<+\infty$，则$TN(A)$闭。

对变分问题(1)的约束条件$Ax=z$，考虑如下的情况，设λ_i是定义在X上的互相独立的线性有界泛函。由Riesz表现定理，对每一个λi，可找到$k_i\in X$使$\lambda_i x=(k_i,x)$。由于λ_i互为独立，易证k_i互为独立。记$K=\mathrm{Span}\{k_1,k_2\cdots k_n\}$，变分问题(1)的约束条件为

$$\lambda_i x=z_i,\quad i=1,2,\cdots,n \tag{3}$$

记线性有界算子A：$X\to R^n$

$$Ax=((k_1,x),\cdots,(k_n,x))^T,$$

记
$$z=(z_1,z_2,\cdots,z_n)^T,$$

于是约束条件(3)写成$Ax=z$。我们来寻求相应于(3)的变分问题解的构造，注意到(2)，

本文1989年4月15日收到

变分问题的解σ满足

$$(T\sigma,Tx)_Y=0,\ \forall x\in TN(A)\Leftrightarrow T\sigma\in(TN(A))^{\perp}\Leftrightarrow T\sigma\in(TK^{\perp})^{\perp},$$

另一方面

$$(T\sigma,Tx)_Y=0,\ \forall x\in TN(A)\Leftrightarrow(T^*T\sigma,x)_X=0$$

$$\Leftrightarrow T^*T\sigma\in(K^{\perp})^{\perp}=\bar{K}=K\Leftrightarrow T^*T\sigma\in R(T^*)\cap K$$

$$\Leftrightarrow T^*T\sigma\in N(T)^{\perp}\cap K\triangleq H\Leftrightarrow T\sigma\in(T^*)^{-1}H$$

引理 4 记 $H=N(T)^{\perp}\cap K$有$(TK^{\perp})^{\perp}=(T^*)^{-1}H$。

引理 5 设$\dim N(T)=q<+\infty$，则$\dim H=n-q$，$\dim(TK^{\perp})^{\perp}=n-q$，即 $T\sigma$落在Y的一个维数为$n-q$的子空间中。

有了上述引理，便可寻求σ。记

$$N(T)=\mathrm{Span}\{l_1,l_2,\cdots,l_q\} \tag{4}$$

第一步 寻求$H=N(T)^{\perp}\cap K$的基底$h_1,h_2,\cdots h_{n-q}$，选$h_i\in\mathrm{Span}\{k_i,k_{i+1},\cdots,k_{i+q}\}$，注意到$h_i\in N(T)^{\perp}$，故$(k_i,l_p)=0$，即$(k_{i+m},l_p)=0$，$m=0,1,\cdots,q$。由此令

$$h_i=\beta_i\begin{vmatrix}(k_i,l_1)_X & \cdots & (k_i,l_q)_X & k_i\\ \cdots & & \cdots & \\ (k_{i+q},l_1)_X & \cdots & (k_{i+q},l_q)_X & k_{i+q}\end{vmatrix},\quad \beta_i\neq 0 \tag{5}$$

推知$h_1,h_2,\cdots,h_{n-q}$线性无关。

第二步 找$(TK^{\perp})^{\perp}$，即$T\sigma$ 所在空间的基底 $f_1,\cdots,f_{n-q}$,或即计算 $f_i=(T^*)^{-1}h_i$，$i=1,2,\cdots,n-q$，为此设$X\subset L_2(\Omega)$，$Y=L_2(\Omega)$，在X中引入内积

$$(u,v)_X=(u,v)_{L_2}+(Tu,Tv)_{L_2} \tag{6}$$

定理 1 假定$h(x)\in X$且与$N(T)$正交，则

$$((T^*)^{-1}h)(t)=(h(x),G(x,t))_X \tag{7}$$

其中$G(x,t)$是T的Green函数，即$T_xG(x,t)=\delta(x,t)$。

记

$$\det\begin{pmatrix}l_1,\cdots,l_qf\\ \lambda_i,\cdots\cdots,\lambda_{i+q}\end{pmatrix}=\begin{vmatrix}\lambda_il_1 & \cdots & \lambda_il_q & \lambda_if\\ \cdots & & \cdots & \\ \lambda_{i+q}l_1 & \cdots & \lambda_{i+q}l_q & \lambda_{i+q}f\end{vmatrix}$$

定义函数f在$\lambda_ix,\cdots,\lambda_{i+q}x$的$q$阶差商为

$$[\lambda_ix,\cdots,\lambda_{i+q}x]f=\det\begin{pmatrix}l_1,\cdots,l_qf\\ \lambda_i,\cdots\cdots,\lambda_{i+q}\end{pmatrix}\Big/\det\begin{pmatrix}l_1,\cdots,l_{q+1}\\ \lambda_i,\cdots,\lambda_{i+q}\end{pmatrix} \tag{8}$$

这里$l_{q+1}(t)=\int_{\Omega}G(x,t)\mathrm{d}x$

由定理1，并选取适当的β_i，利用差商记号，我们有

$$f_i(t)=((T^*)^{-1}h_i)(t)=[\lambda_ix,\cdots\lambda_{i+q}x]G(x,t) \tag{9}$$

称为算子T在$\lambda_ix,\cdots\lambda_{i+q}x$处的$q$阶$B$样条，记为$B_{i,q}(t)$，在具体的应用中，$B_{i,q}(t)$有局部支集性质。

第三步 找$T\sigma$，注意到$T\sigma\in(TK^{\perp})^{\perp}$有

$$T\sigma=\sum_{j=1}^{n-q}\lambda_jf_j \tag{10}$$

两边对f_i作内积有

$$\sum_{j=1}^{n-q}\lambda_j(f_i,f_j)_{L_2}=(f_i,T\sigma)_{L_2}=(T^*f_i,\sigma)_X=(h_i,\sigma)_X$$
$$=[\lambda_i x,\cdots,\lambda_{i+q}x]\sigma \tag{11}$$

第四步　求σ。利用Green函数先分析$T\sigma$的光滑度，再利用关系转移法求出σ。

对某些特殊情况构造σ的具体表达式，取$X=W_2^m[a,b]$，$y=L_2[a,b]$，而

$$Tu=(a_0(x)D^m+\cdots+a_{m-1}(x)D+a_m(x))u(x) \tag{12}$$

$a_0(x)\neq 0$，$D=d/dx$。相应T的Green函数为$G(x,t)$，而T^*的Green函数为$G^*(x,t)$。显然有$G^*(x,t)=G(t,x)$，我们假定$\left\{l_i\right\}_{i=1}^{m+1}$，$\left\{l_i\right\}_{i=1}^{m}$构成契比晓夫系统，对$[a,b]$作重节点分划$x_0=a$，$x_{N+1}=b$，$x_i$重数为$\alpha_i$而记$n=\sum_{i=0}^{N+1}\alpha_i$。考虑变分的约束条件为

$$\sigma^{(j)}(x_i)=r_{ij},\ i=0,1,\cdots,N+1,\ j=0,1,\cdots,\alpha_{i-1} \tag{13}$$

按重节点排序得到相应分划$\left\{\xi_i\right\}_{i=1}^{n}$，于是

$$f_i=((T^*)^{-1}h_i)(t)=(h_i(x),G(x,t))=(h_i(x),G^*(t,x))$$
$$=[\xi_i\cdots,\xi_{i+m}]G^*(t,x)=B^*_{i,m}(t) \tag{14}$$

$B^*_{im}(t)$是算子T^*的B样条，于是$T\sigma$可表示为

$$T\sigma=\sum_{j=1}^{n-m}\lambda_j B^*_{j,m}(x) \tag{15}$$

两边作$B^*_{i,m}(x)$内积有

$$(T\sigma(x),B^*_{i,m}(x))_{L_2}=\sum_{j=1}^{n-m}\lambda_j(B^*_{i,m}(x),B^*_{j,m}(x))_{L_2} \tag{16}$$

另一方面　$(T\sigma,B^*_{i,m}(x))_{L_2}=(\sigma,T^*B^*_{i,m}(x))_X=(\sigma,h_i)_X=[\xi_i,\cdots,\xi_{i+m}]\sigma$

利用约束条件可以求出$[\xi_i,\cdots,\xi_{i+m}]\sigma$的表达式，于是由(16)可解得$\lambda_1,\lambda_2\cdots,\lambda_{n-m}$，下面求$\sigma$的表达式。注意到

$$T\sigma(x)=\sum_{j=1}^{n-m}\lambda_i B^*_{i,m}(x) \tag{17}$$

利用广义TayLor展开式有

$$\sigma(x)=u_0(x)+\int_a^b G(x,t)T\sigma(t)\mathrm{d}t$$
$$=u_0(x)+\sum_{i=1}^{n-m}\lambda_i\int_a^b B^*_{i,m}(t)\ G(x,t)\mathrm{d}t$$
$$=u_0(x)+\sum_{i=1}^{n-m}\lambda_i[\xi_i,\cdots,\xi_{i+m}]\int_a^b G(\cdot,y)G(x,y)\mathrm{d}y$$

这里$u_0(x)\epsilon N(T)$，而$\int_a^b G(x,y)G(t,y)\mathrm{d}y$ 实际上是T^*T的Green函数。可见为了求σ只需要求出$u_0(x)$，为此记

$$g(x)=\sigma(x)-\sum_{i=1}^{n-m}\lambda_i[\xi_i,\cdots,\xi_{i+m}]\int_a^b G(\cdot,y)G(x,y)\mathrm{d}y \tag{18}$$

注意到u_0可写成

$$u_0=\sum_{i=1}^{m}c_i l_i(x)$$

利用约束条件(13)求得

$$c_i=\det\begin{pmatrix} l_1\cdots l_{i-1} & g & l_{i+1}\cdots l_m \\ \xi_1\cdots\xi_{i-1} & \xi_i & \xi_{i+1}\cdots\xi_m\end{pmatrix}\Big/\det\begin{pmatrix} l_1\cdots l_m \\ \xi_1\cdots\xi_m\end{pmatrix}$$

$$+\sum_{i=1}^{n-m}\lambda_i[\xi_i,\cdots,\xi_{i+m}]\int_a^b G(x,y)G(\cdot,y)\mathrm{d}y$$

其中 $g(x)=\sigma(x)-\sum_{i=1}^{n-m}\lambda_i[\xi_i\cdots\xi_{i+m}]\int_a^b G(x,y)G(\cdot,y)\mathrm{d}y$，而$\lambda_1\cdots,\lambda_{n-m}$是下列方程组的解

$$\sum_{j=1}^{n-m}\lambda_i(B^*_{i,m}(x),B^*_{j,m}(x))_{L2}=[\xi_i,\cdots,\xi_{i+m}]\sigma$$

利用上面原理，我们考虑光顺样条问题

$$\phi_\alpha(\sigma_\alpha)=\alpha\int_a^b |T\sigma_\alpha|^2\mathrm{d}x+\sum_{i=0}^{N+1}\sum_{j=0}^{\alpha i-1}(\sigma_\alpha^{(j)}(x_i)-r_{ij})^2=\min \tag{19}$$

同样可求出σ_α的解析表达式。

注 1 当$\alpha_0=\alpha_{N+1}=0$，即为算子T的自然插值问题。

注 2 当$\alpha_0=\alpha_{N+1}=m$，即为算子T的第(Ⅰ)型插值问题。

注 3 当$T=D^m$时，算子样条退化为多项式样条，此时σ的表达式显得简单。在$m=2$和单节点的情况下$(T\sigma)(t_i)$即弯距M_i。

参 考 文 献

1 Василенко В А. СПЛАЙ—функчии: ТЕОРИЯ Алгоритмы, ЛрограммЫ, Наука, 1983: 23～49

2 李岳生。样条与插值。上海科技出版社，1983：43～51

3 Schumarker L L. Spline functions, New York, 1981:36～45

The Construction of Operator Spline Interpolation for Hilbert Space

Huang Youqian Han Guoqiang*

Abstract

Operator spline interpolations are considered. By calculating inner products of B-splines, we obtain a new and stable computational method. This method can be easily carried out in a computer by solving a symmetric, least band-width linear algebraic system. In particular, for polynomial splines, this method is very simple. We also consider smoothing splines and obtain similar results.

Keyword B-splines, smoothing splines, Green functions

* Department of Computer Science