中山大学学报(自然科学版)
第33卷 第1期 ACTA SCIENTIARUM NATURALIUM Vol. 33 No. 1
1994年1月 UNIVERSITATIS SUNYATSENI Jan. 1994

关于空泡动力学方程精确度的分析*

赵 键 汪鸿振 朱物华
(中山大学应用力学与工程系，广州 510275) (上海交通大学，上海 200030)

摘 要 本文通过严格的理论推导，对3个泡壁运动方程的精确度及适用范围作了分析比较. 结果表明，这3个方程都不适用于泡壁运动马赫数较大的强非线性情形. 提出了可以用于分析鉴别其他各类泡壁运动方程的新方法，可在实例数值计算中判断泡壁运动方程精确度的方法.

关键词 空泡，空化，动力学方程
分类号 TV131.2

长久以来，研究者们采用不同的假设，得到了若干描述球形泡壁运动的方程式. 文献〔1〕中介绍了3种最典型的方程式：Rayleigh，Trilling 和 Gilmore 方程. 文〔2〕总结了5种可压缩流体的泡壁运动方程式. Rayleigh 方程不考虑可压缩性导致了误差. Trilling 和 Gilmore 方程中虽引入了可压缩影响项，但没有对其精确度及适用范围作出严格理论证明. 文献〔3〕中的推导与实算指出 Gilmore 方程在高马赫数下误差显著. 作者在〔4〕中也采用流场的拉格朗日描述法，指出 Gilmore 方程只是泡壁运动的马赫数平方值远小于1时才具有高精度. 本文则在此基础上，进一步用欧拉描述法，分析3种泡壁运动方程的精确性.

1 基本公式

在欧拉描述法中，球对称泡周围流场中的流体动力学基本方程为：

运动方程

$$\frac{\partial h}{\partial r}=-\frac{\mathrm{d}v}{\mathrm{d}t} \tag{1}$$

连续性方程

$$\frac{\mathrm{d}h}{\mathrm{d}t}=c^2\left(\frac{\partial v}{\partial r}+\frac{2v}{r}\right) \tag{2}$$

其中，

收稿日期：1991-12-11
* 国家自然科学基金资助项目

(C)1994-2019 China Academic Journal Electronic Publishing House. All rights reserved. http://www.cnki.net

h——流场中某点与无穷远处之焓差；

$$h=\int_{p_\infty}^{p}\frac{\mathrm{d}p}{\rho} \tag{3}$$

v——径向速度；

c——声速；

p——流场中某点处的压力；

p_∞——无穷远处的压力；

ρ——流体密度.

方程（1），（2）中引入 h，已经把状态方程式包括进去了. 为方便起见，全导数$\frac{\mathrm{d}f}{\mathrm{d}t}$统一用 $\dot{f}$ 表示，偏导数 $\partial f/\partial t$，$\partial f/\partial r$ 分别用 f_t，f_r 表达.

全导数的计算公式为

$$\dot{v}=v_t+v\cdot v_r \tag{4}$$

$$\dot{h}=h_t+v\cdot h_r \tag{5}$$

从（1），（2），（4），（5）式可以把 4 个偏导数用全导数式表达出来：

$$h_r=-\dot{v} \tag{6}$$

$$h_t=\dot{h}+v\cdot\dot{v} \tag{7}$$

$$v_r=-(\dot{h}/c^2+2v/r) \tag{8}$$

$$v_t=\dot{v}+v\dot{h}/c^2+2v^2/r \tag{9}$$

若令：

$$\varphi_t=-(h+v^2/2) \tag{10}$$

下面来求 φ 的各阶偏导数. 从（1）式得：

$$\frac{\partial(h+v^2/2)}{\partial r}=-\frac{\partial v}{\partial t} \tag{11}$$

把（10）式代入（11）式中得到

$$\varphi_r=v \tag{12}$$

根据（6）—（9）式可得

$$\varphi_{tr}=\dot{v}+\frac{v}{c^2}\dot{h}+\frac{2}{r}v^2 \tag{13}$$

$$\varphi_{rr}=-(\frac{\dot{h}}{c^2}+\frac{2}{r}v) \tag{14}$$

$$\varphi_{tt}=-[(1+\frac{v^2}{c^2})\dot{h}+2v\dot{v}+\frac{2}{r}v^3] \tag{15}$$

把（12）式代入（10），得到

$$h=-\varphi_t-\frac{1}{2}\varphi_r^2 \tag{16}$$

把（12），（16）式代入（2）式中，并对 t 取偏导，得到

$$\begin{aligned}&(c^2-\varphi_r^2)\varphi_{rr}+\frac{2c^2}{r}\varphi_r-\varphi_{tt}\\&=2\varphi_r\varphi_{rr}\varphi_{tr}+2\varphi_r\varphi_{tr}+2\varphi_{tr}^2\end{aligned} \tag{17}$$

只考虑 c 为常数的情形，则由上式对 t 取偏导，由（13），（14），（15）式两边取全导，最后经整理得到以下 4 个三阶偏导数为

(C)1994-2019 China Academic Journal Electronic Publishing House. All rights reserved. http://www.cnki.net

$$\varphi_{rrr}=\frac{1}{c^2}\left[\ddot{v}-\frac{2v}{r}\dot{v}-\frac{1}{c^2}\dot{h}\dot{v}+\frac{6c^2}{r^2}v+\frac{2\dot{h}}{r}\right] \tag{18}$$

$$\varphi_{trr}=\frac{1}{c^2}\left[-v\ddot{v}+2\left(v^2-c^2\right)\frac{\dot{v}}{r}-\frac{4c^2v^2}{r^2}+\frac{v\dot{h}\dot{v}}{c^2}-\frac{2v\dot{h}}{r}-\ddot{h}\right]$$

$$\varphi_{ttr}=\left(1+\frac{v^2}{c^2}\right)\ddot{v}+\left(6-\frac{2v^2}{c^2}\right)\frac{v\dot{v}}{r}+\frac{2v^2}{r^2} + \left(1-\frac{v^2}{c^2}\right)\frac{\dot{h}\dot{v}}{c^2}+\frac{2v^2}{c^2}\frac{\dot{h}}{r}+\frac{2v}{c^2}\ddot{h} \tag{20}$$

$$\varphi_{ttt}=-\left(3+\frac{v^2}{c^2}\right)v\ddot{v}-2\left(6-\frac{v^2}{c^2}\right)\frac{v^2\dot{v}}{r}=\left(3-\frac{v^2}{c^2}\right)\frac{v\dot{h}\dot{v}}{c^2} -2\frac{v^3}{c^2}\frac{\dot{h}}{r}-\left(1+3\frac{v^2}{c^2}\right)\ddot{h}-2\dot{v}^2 \tag{21}$$

以上求出了用 v，h 及其各阶全导数来表达 φ_t，φ_r，φ_{tt}，φ_{tr}，φ_{rr}，φ_{rrr}，φ_{rrt}，φ_{ttr}，φ_{ttt}的公式，这些繁琐的推导是为下面分析泡壁运动方程的精确性而预备的．采用全导数的目的是为了直接变换得到泡壁运动方程．

2　Rayleigh，Trilling 和 Gilmore 方程精度分析

Gilmore[1]采用 Kirkwood－Bethe 假设导出泡壁运动方程．$K-B$ 假设的数学表达式为

$$\left[\frac{\partial}{\partial t}+\left(c+v\right)\frac{\partial}{\partial r}\right]\left[r\left(h+\frac{v^2}{2}\right)\right]=0 \tag{22}$$

把（10）式代入（22）有

$$\left[\frac{\partial}{\partial t}+\left(c+v\right)\frac{\partial}{\partial r}\right]\left(r\varphi_t\right)=0 \tag{23}$$

即

$$\frac{\varphi_{tt}}{c+v}+\frac{\varphi_t}{r}+\varphi_{tr}=0 \tag{24}$$

把（10），(13)，(15) 式代入（24）式得出泡壁运动的 Gilmore 方程为

$$R\ddot{R}\left(1-\frac{\dot{R}}{c}\right)+\frac{3}{2}\dot{R}^2\left(1-\frac{1}{3}\frac{\dot{R}}{c}\right)=H\left(1+\frac{\dot{R}}{c}\right)+\frac{R\dot{H}}{c}\left(1-\frac{\dot{R}}{c}\right) \tag{25}$$

H ——泡壁处与无穷远处的焓差值；

R，$\dot{R}$，$\ddot{R}$ ——分别为泡壁处的半径、速度与加速度．

Trilling[1]假设速度势 φ 近似地满足声传播方程

$$\left(\frac{\partial}{\partial t}+c\frac{\partial}{\partial r}\right)\left(r\varphi\right)=0 \tag{26}$$

上式两边对 t 取导即有

$$\left(\frac{\partial}{\partial t}+c\frac{\partial}{\partial r}\right)\left(r\varphi_t\right)=0 \tag{27}$$

展开得到

$$\frac{1}{c}\varphi_{tt}+\varphi_{tr}+\frac{1}{r}\varphi_t=0 \tag{28}$$

类似地，可以解出 Trilling 泡壁方程

$$R\ddot{R}\left(1-2\frac{\dot{R}}{c}\right)+\frac{3}{2}\dot{R}^2\left(1-\frac{4}{3}\frac{\dot{R}}{c}\right)=H+\left(1-\frac{\dot{R}}{c}+\frac{\dot{R}^2}{c^2}\right)\frac{R\dot{H}}{c} \tag{29}$$

(C)1994-2019 China Academic Journal Electronic Publishing House. All rights reserved.　　http://www.cnki.net

在（27）式中，令 $C\to\infty$，即考虑不可压流体的情形，有：

$$\frac{\partial}{\partial r}(r\varphi_t)=0 \tag{30}$$

展开（30）得

$$\varphi_{tr}+\frac{1}{r}\varphi_t=0 \tag{31}$$

把（10），（13）式代入（31），便得到 Rayleigh 方程

$$R\ddot{R}+\frac{3}{2}\dot{R}^2=H \tag{32}$$

由此看来，在常声速情形下，我们可以把 Rayleigh，Trilling 和 Gilmore 方程的假设条件用一综合式表达

$$\left(\frac{1}{C_T}\frac{\partial}{\partial t}+\frac{\partial}{\partial r}\right)(r\varphi_t)=0 \tag{33}$$

$C_T\to\infty$——对应于 Rayleigh 方程；

$C_T=c$——对应于 Trilling 方程；

$C_T=c+v$——对应于 Gilmore 方程.

（17）式加上泡壁处与无穷远处的边值条件及初始条件，已经构成了一完整的非线性偏微分方程的初边值问题. 然而由于方程的非线性及牵涉到无限区域等原因，使得直接用数值或解析方法求解此问题有困难. 因此，引入（33）式类型的几种假设正是为了通过近似解的手段，把原来复杂的问题简化成泡壁处的常微分方程初值问题求解. 故（33）式可以认为是（17）式的近似解.（17）式与线性的球面声波波动方程相比，增加了一些非线性影响项，这些项在大马赫数运动条件下是不容忽视的.

引入假设后，方程数目多于未知量的数目，构成矛盾方程组. 通过不同的求解途径便可以得到不同的解. 这些不同的解之间的接近程度便是衡量这些假设式精确性的标准. 在论证（33）式精确度中，我们注意到假设式精确性与状态方程的形式，即声速的变化情况无关，故取常声速来简化推导过程. 作法是首先把（33）式化成与（17）式类似的波动方程形式，然后与（17）相减，得到一个反映假设式与精确式差异的公式，只有当这个式子成立（即误差很小）时，才能说假设式是精确的.

对（24），（28），（31）式作些变化，分别得到

$$\varphi_{rr}+\frac{2}{r}\varphi_r-\frac{\varphi_{tt}}{(c+v)^2}=\frac{\varphi_r}{r}+\frac{\varphi_t}{r^2}+\frac{1}{c+v}\frac{\varphi_t}{r}+\frac{\varphi_{tt}}{(c+v)^2}\left(\varphi_r-\frac{\varphi_r}{c+v}\right) \tag{34}$$

$$\varphi_{rr}+\frac{2}{r}\varphi_r-\frac{\varphi_{tt}}{c^2}=\frac{1}{c}\frac{\varphi_t}{r}+\frac{1}{r^2}\varphi_t+\frac{\varphi_r}{r} \tag{35}$$

$$\varphi_{rr}+\frac{2}{r}\varphi_r=\frac{1}{r^2}\varphi_t+\frac{1}{r}\varphi_r \tag{36}$$

（34），（35），（36）式分别对应于 Gilmore，Trilling 与 Rayleigh 方程. 将（34），（35），（36）式分别与精确方程（17）式相减，得到 3 个误差方程式. 有趣的是，这 3 个误差方程式在泡壁处成为了与原方程类似的姐妹方程. 在实例数值计算中，同时解出各对姐妹方程的解，相互进行比较，若两者相接近，显然这时的数值解是正确的.

（i）对应于 Gilmore 方程有以下新的泡壁运动方程式

$$R\ddot{R}\left[1-\frac{\dot{R}}{c}+A\right]+\frac{3}{2}\dot{R}^2\left[1-\frac{1}{3}\frac{\dot{R}}{c}+B\right]$$

(C)1994-2019 China Academic Journal Electronic Publishing House. All rights reserved. http://www.cnki.net

$$=H\left(1+\frac{\dot{R}'}{c}\right)+\frac{R\dot{H}}{c}\left(1-\frac{\dot{R}}{c}+D\right)+E \tag{37}$$

其中，

$$A=-2\frac{\dot{R}^2}{c^2}\left(1+\frac{\dot{R}}{c}\right)-8\frac{\dot{R}^2}{c(c+\dot{R})}+6\frac{\dot{R}^3}{c(c+\dot{R})^2}+4\frac{\dot{R}^1}{c^3(c+\dot{R})}$$

$$B=\frac{4}{3}\frac{\dot{R}^2}{c(c+\dot{R})}+\frac{8}{3}\frac{\dot{R}^3}{c(c+\dot{R})^2}$$

$$D=-2\frac{\dot{R}}{c+\dot{R}}-\frac{2\dot{R}^2}{(c+\dot{R})^2}-2\frac{\dot{R}^3}{c^2(c+\dot{R})}-\frac{2\dot{R}^1}{c^2(c+\dot{R})^2}$$

$$\begin{aligned}E=&\frac{R^2\dot{R}\ddot{R}}{c^2}\left(\frac{3}{c+\dot{R}}-\frac{c+\dot{R}}{c^2}+\frac{\dot{R}^2}{c^2(c+\dot{R})}\right)\\&+\frac{R^2\dot{H}}{c}\left[\frac{1}{c+\dot{R}}-\frac{c+\dot{R}}{c^2}+3\frac{\dot{R}^2}{c^2(C+\dot{R})}+2\frac{R^2\ddot{R}^2}{(c+\dot{R})^2}\right.\\&\left.-\left(R^2\dot{H}^2\left(1+\frac{\dot{R}^2}{c^2}\right)\left(1+2\frac{\dot{R}}{c}\right)/c^2(c+\dot{R})^2\right)\right]\\&+\frac{R^2\dot{H}\ddot{R}}{c}\left[\frac{-1}{(c+\dot{R})^2}+\frac{\dot{R}}{c^2(c+\dot{R})}+\frac{\dot{R}(c+\dot{R})}{c^1}-\frac{3\dot{R}^2}{c^2(c+\dot{R})^2}\right.\\&\left.-\frac{\dot{R}^3}{(c+\dot{R})c^4}\right]\end{aligned}$$

(ii) 对应于 Trilling 方程则有

$$\begin{aligned}&R\ddot{R}\left(1-2\frac{\dot{R}}{c}+F\right)+\frac{3}{2}\dot{R}^2\left(1-\frac{4}{3}\frac{\dot{R}}{c}\right)\\&=H+\frac{R\dot{H}}{c}\left(1-\frac{\dot{R}}{c}+G\right)+K\end{aligned} \tag{38}$$

其中，

$$F=-14\dot{R}^2/c^2+2\dot{R}^4/c^4$$

$$G=\dot{R}^2/c^2+2\dot{R}^3/c^3$$

$$K=\left(2+\frac{\dot{R}^2}{c^2}\right)\frac{R^2\dot{R}\ddot{R}}{c^2}+\frac{3\dot{R}^2\ddot{H}R^2}{c^4}+\frac{R^2\dot{R}\ddot{R}\dot{H}}{c^4}\left(4-\frac{\dot{R}^2}{c^2}\right)+\frac{2R^2\ddot{R}^2}{c^2}$$

(iii) 对应于 Rayleigh 的假设，得

$$\begin{aligned}&R\ddot{R}\left(1-2\frac{\dot{R}^2}{c^2}\right)+\frac{3}{2}\dot{R}^2\\&=H-\left(\frac{R^2\dot{R}\ddot{R}}{c^2}+\frac{R^2\ddot{H}}{c^2}+\frac{\dot{R}}{c}\frac{R\dot{H}}{c}-\frac{\dot{R}R\dot{H}}{c^2}\frac{R\ddot{R}}{c^2}\right)\end{aligned} \tag{39}$$

在低马赫数时，$\frac{\dot{R}^2}{c^2}<<1$，(37)，(38) 式可分别转化为 Gilmore 及 Trilling 方程. 由此可直接判断这两个方程在低马赫数情况下肯定是精确的. 而在大马赫数 $(\dot{R}/c)^2\sim1$ 时，显然这两个方程与对应的 Gilmore，Trlling 方程误差较大，即表明 Gilmore，Trilling 方程不适于大马赫数场合. 在分析 (39) 式时，主要是由于 $R^2\ddot{H}/c^2$ 项影响到 Rayleigh 方程在小马赫数场合的精确性. 在气泡回弹的瞬间，尽管泡壁马赫数不大，但 $R^2\ddot{H}/c^2$ 与 $R\ddot{R}$ 相比已不可忽略了；另外，在小幅值声扰动情况下，泡壁运动马赫数也很小，若气泡振荡频率为 ω，则 $R^2\ddot{H}/c^2\sim\omega^2R^2H/c^2=(kR)^2H$，$k=\omega/c$ 为波数. 则当 $(kR)^2\sim1$ 时，$R^2\ddot{H}/c^2$ 与 H 相当大小，此时使用 Rayleigh 方程亦会导致大的误差. 因此，Rayleigh 方程适用的条件是：$\dot{R}/c<<1$，$R\ddot{H}/c^2<<R\ddot{R}$（或 H）.

(C)1994-2019 China Academic Journal Electronic Publishing House. All rights reserved.　http://www.cnki.net

3 结　论

对泡壁运动方程式的精确性分析，可通过导出各种假设模型与精确的非线性球泡外流场波动方程的误差公式，来加以评估．本文推导得到的误差方程恰好是与原泡壁方程相似的新的泡壁运动方程式．只有当每对姐妹方程之解接近时，才能断定假设模型是合用的．文中对 Gilmore，Trilling 和 Rayleigh 方程作了分析．用此法亦可进而检验任何一个其他的泡壁运动假设模型的精确性．

参　考　文　献

1 〔美〕柯乃普 R T 等著．空化与空蚀：第四章，瞬态空穴机理，水利水电科学研究院译．北京：水利出版社，1981．65～70

2 Lastman G J，Wentzell R A．JASA，1981，69（3）：638

3 Lastman G J，Wentzell R A．Acustica，1981，49：64

4 赵键，汪鸿振，朱物华．可压缩液体中球形泡泡壁运动的研究．上海交通大学学报，1989，23（1）：91～94

Analysis on the Accuracy of Bubble Dynamic Equations

Zhao Jian *　*Wang Hongzhen*　*Zhu Wuhua*

Abstract　Bubble dynamics is concerned with a complicated nonlinear problem. Various bubble wall motion equations had been proposed to simplify the solving process, in which the Rayleigh's, Trilliang's, Gilmore's cquations are typical. The accuracy and applicable extent of the above three equations are analyzed and compared with each other by theoretical derivation . Results show that these equations are not suitable for the case of strong nonlinearity at large mach number and Rayleigh' s equation is failed in bubble sound propagation. The new method for identifying the accuracy of bubble wall motion equations suggested in this paper can be used to analyze other types of bubble wall motion equations. The method for identifying the accuracy in numerical calculations is also proposed.

Keywords　bubble, cavitation, dynamical equations

* Department of Applied Mechanics and Engineering, Zhongshan University, Guangzhon 510275

(C)1994-2019 China Academic Journal Electronic Publishing House. All rights reserved.　http://www.cnki.net