第31卷 第1期
1992年

中山大学学报（自然科学版）
ACTA SCIENTIARUM NATURALIUM UNIVERSITATIS SUNYATSENI

Vol.31 №.1
1992

·研究简报·

Schwinger模型中矢量粒子质量的格点计算*

方锡岩 许国材** 陈启洲

（物理学系）

摘 要 本文用变分方法计算带Wilson费米子的格点Schwinger模型的矢量介子的质量，得到与连续理论严格解相符的结果。

关键词 格点，Schwinger模型，Wilson费米子

Schwinger模型[1]是描写 1 + 1 维QED的严格可解模型，它具有电荷禁闭和手征对称破缺的特征[2]。这些特征是 QCD 理论的主要性质之一。为了弄清非微扰QCD效应，人们通过格点规范理论研究了 Schwinger 模型[3,4]，得到许多令人鼓舞的结果。

我们曾经利用变分方法计算了Naive费米子的$\langle\overline{\Psi}\Psi\rangle/g$，得到较好的标度行为[5] 但它的值（$-0.35\pm0.05$）比严格解（$-0.16$）大1倍。后来我们利用Wilson费米子方案，令Wilson参数$r=1$，经过减除后得到$\langle\overline{\Psi}\Psi\rangle/g=-0.20$[6]，计算结果与严格解很好地符合。连续理论的Schwinger模型中当“quark”质量 $m=0$ 时，得到一矢量玻色子的质量$m_v=e/\sqrt{\pi}=0.56e$。Hamer等人利用有限格点方法计算m_v的值[7]。本文用变分方法计算m_v值，得到较好结果。

1 变分真空和m_v值

1 + 1 维带Wilson费米子的格点哈密顿量为

$$H=\frac{g^2}{2a}\sum_x E_j^2(x)+\frac{1}{2a}\sum_{x,k}\overline{\Psi}(x)\gamma_k U(x,k)\Psi(x+k)+\frac{r}{2a}\sum_{x,k}[\overline{\Psi}(x)\Psi(x)-\overline{\Psi}(x)U(x,k)\Psi(x+k)]+m\sum_x\overline{\Psi}(x)\Psi(x) \qquad (1)$$

其中$E_j\cdot(x)$为$U(1)$规范群的生成元，$U(x,k)$为点阵x在k方向的规范链变量，$k=\pm1$，$j=1$，$\gamma_k=-\gamma_{-k}$为泡利矩阵：

$$\gamma_1=\begin{pmatrix}0 & -i\\ i & 0\end{pmatrix},\quad \gamma_0=\begin{pmatrix}1 & 0\\ 0 & -1\end{pmatrix},\quad \gamma_5=i\gamma_0\gamma_1=\begin{pmatrix}0 & 1\\ 1 & 0\end{pmatrix} \qquad (2)$$

a、r、m分别为格距，Wilson参数，“quark”质量（在以后的计算中令$m=0$），无

本文1991年1月8日收到

* 国家自然科学基金和中山大学高等学术中心资助项目

** 广东教育学院

量纲的裸耦合常数$g=ea$（e为带质量量纲的裸耦合常数）。二分量的旋量场$\Psi(x)$表示为：

$$\Psi(x)=\begin{bmatrix}\xi(x)\\ \eta^{+}(x)\end{bmatrix} \tag{3}$$

裸真空定义为：

$$\xi(x)|0\rangle=\eta(x)|0\rangle=E_1^2(x)|0\rangle=0 \tag{4}$$

我们引入带费米子的规范场系统的变分真空态$|\Omega\rangle$：

$$|\Omega\rangle=e^{i\theta_1 S_1+i\theta_2 S_2}|0\rangle=U|0\rangle \tag{5}$$

其中 $U=e^{i\theta_1 S_1+i\theta_2 S_2}$，$S_1=i\sum_{x,k}\Psi^{+}(x)\gamma_k U(x,k)\Psi(x+k)$，$S_2=i\sum_{x,k}\Psi^{+}(x)\gamma_k U(x,2k)\Psi(x+2k)$，$\theta_1$和$\theta_2$分别为变分参数，它们由真空能量$E_0$取极小值条件确定：

$$\partial E_0/\partial\theta_1=0,\qquad \partial E_0/\partial\theta_2=0 \tag{6}$$

将(1)式代入(6)式得到θ_1、θ_2依赖于$1/g^2$的关系式。

参照文献〔3，4〕的方法引入矢量介子的变分波函数为：

$$|V\rangle=[A\Psi^{+}(x)\gamma_5\Psi(x+k)+B\Psi^{+}(x)\gamma_5 U(x,2k)\Psi(x+2k)+C\Psi^{+}(x)\gamma_5 U(x,3k)\Psi(x+3k)]|\Omega\rangle$$

上式中重复指标表示求和，A，B，C为变分参数。由(1)式及上式得到：

$$\begin{aligned}a\cdot m_v=&\frac{a\langle V|H|V\rangle}{\langle V|V\rangle}-\frac{a\langle\Omega|H|\Omega\rangle}{\langle\Omega|\Omega\rangle}=2D_0+8[D_1(A_0A_1+A_1A_2+A_2A_3\\&+A_3A_4)+D_2(A_0A_2+\frac{1}{2}A_1^2+A_1A_3+A_2A_4)+D_3(A_0A_3+A_1A_2\\&+A_1A_4)+D_4(A_0A_4+A_1A_3+\frac{1}{2}A_2^2)]/F_0+g^2\{A_1^2+2A_2^2+3A_3^2\\&+4A_4^2-(2\theta_2)^2[\frac{1}{2}A_0^2+A_2^2+A_3^2+A_4^2]\}/F_0\end{aligned} \tag{7}$$

其中： $F_0=A_0^2+2[A_1^2+A_2^2+A_3^2+A_4^2]$

$$D_0=(2\theta_1)[1-\frac{(2\theta_1)^2}{2}]+r[1-(2\theta_1)^2+\frac{(2\theta_1)^4}{4}]+(2\theta_2)(2\theta_1)\cdot r[1-\frac{(2\theta_1)^2}{3}]$$

$$D_1=\frac{1}{2}(2\theta_2)[1-(2\theta_1)^2+\frac{5}{24}(2\theta_1)^4]-(2\theta_2)(2\theta_1)r[1-\frac{(2\theta_1)^2}{3}]-\frac{r}{2}[1-\frac{(2\theta_1)^3}{2}+\frac{(2\theta_1)^4}{12}]$$

$$D_2=-\frac{1}{2}(2\theta_1)[1-\frac{2}{3}(2\theta_1)^2]+\frac{(2\theta_1)^2}{2}\cdot r[1-\frac{(2\theta_1)^2}{3}]+\frac{(2\theta_2)(2\theta_1)^2}{12}\cdot r$$

$$D_3=-\frac{(2\theta_2)}{2}[1-\frac{3}{2}(2\theta_1)^2+\frac{3}{8}(2\theta_1)^4]+(2\theta_2)(2\theta_1)\cdot r[1-\frac{(2\theta_1)^2}{2}]-\frac{1}{4}(2\theta_1)^2\cdot r[1-\frac{(2\theta_1)^2}{4}]$$

$$D_4=-\frac{(2\theta_1)^3}{12}+\frac{(2\theta_1)^4}{24}\cdot r-\frac{(2\theta_2)(2\theta_1)}{2}\cdot r[1-\frac{(2\theta_1)^2}{3}]$$

$$A_0=-2(2\theta_1)(2\theta_2)[1-\frac{(2\theta_1)^2}{3}]A+(2\theta_1)^2[1-\frac{(2\theta_1)^2}{3}]B$$

$$+2(2\theta_1)(2\theta_2)[1-\frac{(2\theta_1)^2}{2}]C$$

$$A_1=[1-\frac{(2\theta_1)^2}{2}+\frac{(2\theta_1)^4}{12}]A-\frac{(2\theta_1)^3(2\theta_2)}{6}]B+\frac{(2\theta_1)^2}{2}[1-\frac{(2\theta_2)^2}{4}]C$$

$$A_2=-\frac{(2\theta_1)^3(2\theta_2)}{6}\cdot A+[1-(2\theta_1)^2+\frac{7}{24}(2\theta_1)^4]B-(2\theta_1)(2\theta_2)[1-\frac{(2\theta_1)^2}{2}]\cdot C$$

$$A_3=\frac{(2\theta_1)^2}{2}[1-\frac{(2\theta_1)^2}{4}]\cdot A-(2\theta_1)(2\theta_2)[1-\frac{(2\theta_1)^2}{2}]B+[1-(2\theta_1)^2+\frac{(2\theta_1)^4}{4}]\cdot C$$

$$A_4=(2\theta_1)(2\theta_2)[1-\frac{(2\theta_1)^2}{3}]\cdot A+\frac{(2\theta_2)^2}{2}[1-\frac{(2\theta_1)^2}{3}]\cdot B-(2\theta_1)(2\theta_2)[1-\frac{(2\theta_1)^2}{3}]\cdot C$$

由变分原理：

$$\partial m_v/\partial A=0\quad,\quad\partial m_v/\partial B=0\quad,\quad\partial m_v/\partial C=0\qquad(8)$$

得到m_v所满足的久期方程，解此方程取m_v的最小值，结果见图1。

2　结论和讨论

从图 1 看到，格点变分方法算出的m_v值，当$r=0.0$时接近连续理论严格解结果，当$r=0.2$时偏离严格解稍大一些。造成m_v明显依赖于r的可能原因是计算过程$2\theta_2$的高次方被忽略，同时$2\theta_1$次幂取得不够高。可以相信计入较高次方后，结果将得到改善。

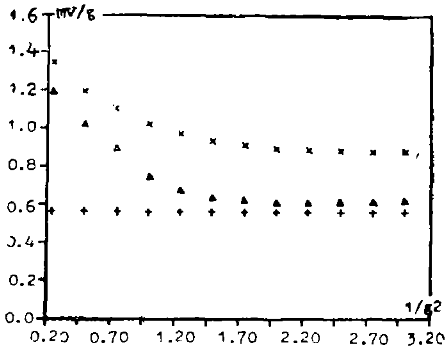

图 1　$m_v/g\sim1/g^2$的关系．其中"+"代表连续极限严格解，"△"代表$r=0.0$时的情况，"×"代表$r=0.2$时的情况

Fig.1　m_V/g versus $1/g^2$. Where the symbols△, × and + represent the data for $r=0.0, 0.2$ and the exact value, respectively

参考文献

1　Schwinger J.Phys Rev,1962, 128:2425
2　Marciano W,Pagels H.Phys Rep,1978, 36c:137
3　Banks T,Kogut J,Susskind L.Phys Rev,1978, D13:1043
4　Carroll A *et al*. Phys Rev. 1976, D13:2270
5　Luo Xiang-qian,Chen Qi-zhou. J Phys, 1990, G16:1181
6　Chen Qi-zhou, Luo Xiang-qian.Phys Rev, 1990, D42:1293
7　Hamer C J, Kogut J, Crewther D P *et al*. Nucl Phys, 1982, B208:413

Calculation of Vector Meson Mass in Lattice Schwinger Model

*Fang Xiyan**　　*Xu Guocai*　　*Chen Qizhou*

Abstract The mass of the "vector meson" in the Schwinger Model with wilson lattice fermions is calculated,using the variational method. Our results are consistent with the exactly calculable value in the continuum.

Keywords lattice, Schwinger model, Wilson Fermions

* Department of Physics