

KNA算法计算单零点多项式全部零点的复杂性

高堂安 易艳春

(计算机科学系)

摘要 证明用KNA算法计算 n 次单零点多项式全部零点所需的多项式计值次数不超过 $O(n^3 \log_2(n/\epsilon))$, 其中 ϵ 是计算精度。

关键词 多项式零点, 分片线性同伦, 计算复杂性

1 引言

文[1]证明了除一测度很小的多项式集外, 计算多项式逼近零点的Newton法是多项式时间算法。并在同一文中提出计算多项式全部零点的单纯同伦算法是否也有类似结论这一问题。文[2]证明Kuhn算法计算 n 次多项式全部零点所需的多项式计值次数不超过 $O(n^3 \log_2(n/\epsilon))$, 其中 ϵ 是计算精度。但Kuhn算法并不是严格意义上的单纯同伦算法。

KNA算法^[3]是一种计算多项式全部零点的单纯同伦算法。本文证明, KNA算法计算 n 次单零点多项式全部零点所需的多项式计值次数不超过 $O(n^3 \log_2(n/\epsilon))$, 其中 ϵ 是计算精度。

2 KNA算法

设 $f(z) = z^n + \sum_{k=1}^n a_k z^{n-k}$ 是 n 次首一多项式, 取辅助多项式 $g(z) = z^n - r_0^n$, 其中常数 $r_0 > 0$, 定义同伦 $H: [0, 1] \times C \rightarrow C$ 为

$$H(t, z) = \begin{cases} f(z) + 2tb, & t \in [0, \frac{1}{2}] \\ (2t-1)g(z) + 2(1-t)(f(z) + b), & t \in [\frac{1}{2}, 1] \end{cases}$$

其中 b 为非零复数。

给 $[0, 1] \times C$ 以渐细剖分 ρJ_3 ^[3], 记 $(\rho J_3)^k$ 为 ρJ_3 的 k 维骨架, $k = 0, 1, 2$. 我们约定, ρJ_3 中的元素用 σ 表示, $(\rho J_3)^2$ 中的元素用 τ 表示, 并且 σ 和 τ 都是相对开的集合。设 $\tau \in (\rho J_3)^2$, $\tau = \langle v_0, v_1, v_2 \rangle$, $v_i = \langle 2^{-ki}, z_i \rangle$, $i = 0, 1, 2$, 称 $d(\tau) = \max\{k_0, k_1, k_2\}$ 为 τ 的深度; 类似定义 σ 的度 $d(\sigma)$ 。设 $\Phi: [0, 1] \times C \rightarrow C$ 是同伦 H 基于剖分 ρJ_3 的单纯逼近。记

本文1990年1月10收到

本研究由中山大学高等学术研究中心基金会资助

$Q(\delta) = \{s + is^2 \in C \mid 0 < s < \delta\}$. 设 $\tau \in (\rho J_3)^2$, 如果存在 $\delta > 0$, 使 $Q(\delta) \subset \Phi(\tau)$, 则称 τ 为完备界面; 设 $\sigma \in \rho J_3$, 如果 σ 有一界面是完备的, 则称 σ 为完备单形. 熟知, 每个完备单形恰有两个完备界面.

引理 1 设 $\tau \in (\rho J_3)^2$ 是完备的, 如果 τ 的 3 个顶点都不是 Φ 的零点, 则至少有 2 个顶点的 Φ 象之间的夹角不小于 $2\pi/3$.

引理 2^[3] 设 $0 < \rho \leq r_0/20n$, 则在 $\{1\} \times C$ 上存在 n 个完备界面, 从这 n 个完备界面出发, 由标准互补转轴规则产生的 n 个由完备单形组成的序列, 按零点重数收敛到多项式的全部 n 个零点. 特别地, 如果多项式只有单零点, 则在同伦 H 中取 $b = 0$ 时, 结论仍成立.

本文以下约定所论多项式 $f(z)$ 只有单零点, 在同伦 H 中取 $b = 0$, 则当 $t = \frac{1}{2}$ 时, $H(t, z) = f(z)$. 另外, 取 $r_0 = 20n$, $\rho = 1$, 这时引理 2 成立.

3 计算复杂性

设多项式 $f(z) = z^n + \sum_{k=1}^n a_k z^{n-k}$ 的 n 个不同零点是 z_1, \dots, z_n .

定理 1 设 $\tau \in (\rho J_3)^2$ 是完备界面, $d(\tau) > 1$, 则存在某个 z_i , 使 τ 在 C 上的投影与 z_i 之间的距离不大于 $3n2^{-d(\tau)}/\sqrt{2}$.

证明 因为 τ 的直径小于 $2^{-d(\tau)+1}\sqrt{2}$, 注意到引理 1, 证明与 [2] 类似, 从略.

定理 2 设 $\varepsilon > 0$ 充分小, 令 $D = \lceil \log_2 \frac{5n+4}{\varepsilon} \rceil$, 则在精度 ε 范围内计算多项式全部零点, 深度超过 D 的计算是不必要的, 其中 $\lceil r \rceil$ 表示不小于 r 的最小整数.

证明 因为

$$3n2^{-D}/\sqrt{2} + 2^{-D+1}\sqrt{2} \leq (3n/\sqrt{2} + 2\sqrt{2}) \frac{\varepsilon}{5n+4} < \varepsilon,$$

根据定理 1, 对每个完备界面, 存在某个 z_i , 使该完备界面在 C 上投影中的每一点与 z_i 之间的距离小于 ε .

引理 3^[2] 对任意 $w \in C$, $|w| < 1$ 恒成立

$$|\arg(1+w)| \leq \pi/2 \cdot |w|.$$

定理 3 $[\frac{1}{2}, 1] \times C$ 中的完备界面均位于以 $[\frac{1}{2}, 1] \times \{0\}$ 为轴, 半径为

$$R = 40n \max_k \{|a_k|, 1\}$$
 的圆柱体内.

证明 根据引理 1, 只须证明, 对任意 $\langle (t, z), (t', z') \rangle \in (\rho J_3)^1$, 并且 $|z|, |z'| > 39n \max_k \{|a_k|, 1\}$, 恒成立

$$|\arg(H(t', z')/H(t, z))| < 2\pi/3$$

记 $\gamma = 39n \max_k \{|a_k|, 1\}$, 则 $H^{-1}(0) \subset [0, 1] \times \{z \in C \mid |z| < \gamma\}$.

记 $f(z) = z^n [1 + \frac{a^1}{z} + \dots + \frac{a_{n-1}}{z^{n-1}} + \frac{a_n}{z^n}] = z^n (1 + v(z))$

若 $t = t' = 1$, 则

$$\left| \left(\frac{20n}{z'} \right)^n - \left(\frac{20n}{z} \right)^n \right| \leq \left(\frac{20n}{r} \right)^n + \left(\frac{20n}{r} \right)^n < 3/5,$$

$$\left| \frac{\left(\frac{20n}{z'} \right)^n - \left(\frac{20n}{z} \right)^n}{1 - \left(\frac{20n}{z} \right)^n} \right| \leq \frac{3/5}{1 - \left(\frac{20n}{r} \right)^n} < \frac{6}{7} < 1,$$

这样, 根据引理 3 得

$$\begin{aligned} \left| \arg \frac{H(t', z')}{H(t, z)} \right| &= \left| \arg \frac{(z')^n - (20n)^n}{z^n - (20n)^n} \right| \leq \left| \arg \left(\frac{z'}{z} \right)^n \right| \\ &+ \left| \arg \frac{1 - \left(\frac{20n}{z'} \right)^n}{1 - \left(\frac{20n}{z} \right)^n} \right| \leq n \left| \arg \frac{z'}{z} \right| + \left| \arg \left(1 + \frac{\left(\frac{20n}{z'} \right)^n - \left(\frac{20n}{z} \right)^n}{1 + \left(\frac{20n}{z} \right)^n} \right) \right| \\ &\leq n\sqrt{2}/r + \pi/2 \cdot 6/7 < 2\pi/3. \end{aligned}$$

如果 $t = t' = \frac{1}{2}$, 因 $|v(z')| \leq 1/39n$,

$$\left| \frac{v(z) - v(z')}{1 + v(z')} \right| \leq \frac{2/39n}{1 - 1/39n} < \frac{1}{19} < 1,$$

根据引理 3, 类似上面推导得

$$|\arg(H(t, z)/H(t', z'))| < 2\pi/3$$

当 $t = 1, t' = 1/2$ 时, 类似有上式成立.

引理 4 设 d 是非负整数, K_d 是 $\{z^{-d}\} \times C$ 与 $\{z^{-d-1}\} \times C$ 之间的基本立方体, 设 $\zeta \in C$, Z_d 是以 $[z^{-d-1}, z^{-d}] \times \{\zeta\}$ 为轴的圆柱体. 记 s_d 是与 $K_d \cap Z_d$ 相交的单形的数目, 则

$$s_d \leq 14 \text{vol}(K_d \cap Z_d) z^{3d},$$

其中 $\text{vol}(S)$ 是 S 在三维欧氏空间中的体积.

证明与 [2] 类似, 从略.

定理 4 设多项式 $f(z) = z^n + \sum_{k=1}^n a_k z^{n-k}$ 只有单零点, $\varepsilon > 0$ 充分小, 则在精度 ε 范围内计算 n 次多项式全部零点所需的多项式计值次数不超过 $7\pi(40n \max\{|a_k|, 1\})^2 +$

$$31.5\pi n^3 \lceil \log_2 \frac{5n+4}{\varepsilon} \rceil.$$

证明 根据定理 3 和引理 4, 在 $\{1\} \times C$ 与 $\{\frac{1}{2}\} \times C$ 之间的完备单形数目不超过

$$14\pi(40n \max\{|a_k|, 1\})^2 \cdot \frac{1}{2}$$

当 $d \geq 1$ 时, 根据定理 1, 在 $\{z^{-d}\} \times C$ 与 $\{z^{-d-1}\} \times C$ 之间的完备单形数目不超过

$$n14\pi(3nz^{-d}/\sqrt{2})^2 z^{-d-1} z^{3d} = 63\pi n^3/2$$

因此, 根据定理 2, 在精度 ε 范围内, 计算多项式全部零点所涉及到的完备单形数不超过

$$7\pi(40n \max_k \{|a_k|, 1\})^2 + 31.5\pi n^3 \lceil \log_2(\frac{5n+4}{\varepsilon}) \rceil.$$

因每个完备单形仅涉及一次多项式计值, 定理证毕。

参 考 文 献

- 1 Smale S. Bull Amer Math Soc, 4(1981): 1~36
- 2 Kuhn H W, Wang Z, Xu S. Math Prog, 28(1984): 156~163
- 3 Kojima M, Nishino H, Arima N. Math Prog, 16(1979):37~62

Computational Complexity of KNA Algorithm Locating All Zeroes of Polynomials with Only Simple Zeroes

Gao Tang'an Yi Yanchun

Abstract KNA algorithm is a kind of PL homotopy methods for locating all zeroes of polynomials. This paper shows that the cost of the algorithm finding all zeroes of a polynomial with only simple zeroes grows no faster than $O(n^3 \log_2(n/\varepsilon))$, where n is the degree of the polynomial and ε is the computational accuracy.

Keywords zeroes of polynomials, PL homotopy, computational complexity

* Department of Computer Science