第32卷 第4期
1993年

中山大学学报（自然科学版）
ACTA SCIENTIARUM NATURALIUM UNIVERSITATIS SUNYATSENI

Vol.32 №.4
1993

·研究简报·

关于一类泛函极小的$C^{1,\beta}$部分正则性

梁鋈廷
（中山大学数学系）

摘　要　给出一类泛函极小的$C^{1,\beta}$部分正则性新证。

关键词　向量值泛函，极小，部分正则性

设G是n的维欧氏空间E^n中的有界区域。设$u=(u^1,\cdots u^N)\in W^1_p(G,E^N),P\geq 2$，

$$u^i_{,\alpha}=\frac{\partial u^i}{\partial x^\alpha},$$

$$I(u,G)=\int_G\left[G^{\alpha\beta}(x,u)g_{ij}(x,u)u^i_{,\alpha}u^j_{,\beta}\right]^{p/2}\mathrm{d}x \tag{1}$$

其中，$(G^{\alpha\beta})=(G_{\alpha\beta})^{-1}$，$G_{\alpha\beta}(x,u)=G_{\beta\alpha}(x,u)$，$g_{ij}(x,u)=g_{ji}(x,u)$

$$|\xi|^2\leq G_{\alpha\beta}(x,u)\xi^\alpha\xi^\beta\leq k|\xi|^2,\quad |\zeta|^2\leq g_{ij}(x,\mu)\zeta_i\zeta_j\leq k|\zeta|^2 \tag{2}$$

并且设$G_{\alpha\beta}$和g_{ij}分别是其自变量的$C^{0,\sigma}$连续函数。

定理[1] 设$u\in W^{1,p}_{loc}(G,E^N)$是（1）的局部极小，即

$$I(u,\mathrm{Supp}\varphi)\leq I(u+\varphi,\mathrm{Supp}\varphi)\qquad\forall\varphi\in \mathring{W}^{1,p}(G,E^N) \tag{3}$$

那么存在常数$\beta\in(0,1)$和开集$G_0\subset G$，使$u\in C^{1,\beta}(G_0,E^N)$并且$G/G_0$是零测度集。

〔1〕中证明很大程度上是依靠了对方程

$$\int_G|\nabla v|^{p-2}\nabla v\cdot\nabla\varphi\mathrm{d}x=0\qquad\forall\varphi\in\mathring{W}^{1,p}(G,E^N) \tag{4}$$

的解$u\in W^{1,p}_{loc}(G,E^N)$所满足的衰减性质：$\varphi(x_0,r)\leq C\left(\frac{r}{\rho}\right)^\alpha\varphi(x_0,\rho)(r\leq\rho$，$B(x_0,\rho)=\{|x-x_0|<\rho\}\subset G)$，其中$\alpha>0$是某个常数，$\varphi(x_0,r)\equiv|(\nabla v)_{x_0,r}|^{p-2}f_{B(x_0,r)}|\nabla v-(\nabla v)_{x_0,r}|^2\mathrm{d}x+f_{B(x_0,r)}|\nabla v-(\nabla v)_{x_0,r}|^p\mathrm{d}x,(\nabla u)_{x_0,r}=f_{B(x_0,r)}\nabla u\mathrm{d}x$为$\nabla u$在$B(x_0,r)$上的积分平均值。本文给出一个新证明，不必用到（4）的解的衰减估计，但要用到〔1〕、〔2〕中的如下已知结果：

引理1　设$u\in W^{1,p}_{loc}(G,E^N)$是（4）的解，那么对任何$B(x_0,\rho)\subset\subset G$和$r\leq\rho$成立

$$\operatorname*{vrai\ max}_{B(x_0,\rho/2)}|\nabla u|^p\leq C(n,N,p)f_{B(x_0,\rho)}|\nabla u|^p\mathrm{d}x \tag{5}$$

本文1991年9月11日收到

$$\underset{B(x_0,r/2)}{\text{vrai max}}|\nabla u(x)-\nabla u(y)|\leqslant C(n,N,P)\left(\frac{r}{\rho}\right)^{\gamma}\underset{B(x_0,\rho)}{\text{vrai max}}|\nabla u| \tag{6}$$

其中 $\gamma=\gamma(n,N,p)>0$ 是某个常数。

定理证明　设$x_0\epsilon G_0=\{x\ \Big|\lim\limits_{\rho\to 0}\rho^{p-n}\int_{B(x,\rho)}|\nabla u|^p dx=0$，

$\limsup\limits_{\rho\to 0}|(u)_{x,\rho}|<\infty\}$，可确定 $R>0$ 使$B(x_0,4R)\subset G$，　$|(u)_{x_0,\rho}|\leqslant K<+\infty(\rho\leqslant R)$

并且$\rho^{p-n}\int_{B(x_0,\rho)}|\nabla u|^p dx\to 0\ (\rho\to 0)$。

设$\rho\leqslant R$，由于设$G_{\alpha\beta}$和g_{ij}为对称，令v为满足 $v-u\epsilon \overset{\circ}{W}{}^{1,p}(B(x_0,\rho),E^N)$并使 $\int_{B(x_0,\rho)}\left[G^{\alpha\beta}(x^0,u_{x_0\rho})g_{ij}(x_0,u_{x_0},\rho)v^i_{,\alpha}\ v^j_{,\beta}\right]^{p/2}dx=\min$。那么通过适当变换，(5)、(6)对$v$成立，只是常数$C$现在还要依赖于$K$（参见〔1〕第12页上的有关证明）。又据对$G_{\alpha\beta}$、$g_{ij}$的假定，成立$|G^{\alpha\beta}(x,u)-G^{\alpha\beta}(y,z)|\leqslant\omega(|u|,|x-y|^p+|u-z|^p)$，$|g_{ij}(x,u)-g_{ij}(y,z)|\leqslant\omega(|u|,|x-y|^p+|u-z)|^p)$，其中$\omega(s,t)$是$s$、$t$的非负连续函数，$t$固定关于$s$为不减，$s$固定则是$t$的不减凹函数，满足$\omega(s,t)\leqslant C(K)t^{\sigma/p}(0\leqslant s\leqslant K)$。作为引理1的直接推论以及〔1〕引理5.1，对$v$成立

$$\int_{B(x_0,r)}|\nabla v|^p dx\leqslant C(n,N,p)\left(\frac{r}{\rho}\right)^n\int_{B(x_0,\rho)}|\nabla v|^p dx,\ r\leqslant\rho \tag{7}$$

$$\int_{B(x_0,r)}|\nabla u-(\nabla v)_{x_0 r}|^p dx\leqslant C(n,N,\rho)\left(\frac{r}{\rho}\right)^{n+pr}\int_{B(x_0,\rho)}|\nabla v|^p dx \tag{8}$$

$$⨍_{B(x_0,\rho)}|\nabla u-\nabla v|^p dx\leqslant C⨍_{B(x_0,\rho)}|\nabla u|^p dx\,\omega^{\delta}(K,C\rho^p\int_{B(x_0,\rho)}(1+|\nabla u|^p)dx) \tag{9}$$

(9)中$\sigma>0$（是某个常数）和$C>0$除依赖n,N,ρ外还依赖于K。(7)和(9)分别隐含

$$\int_{B(x_0,r)}|\nabla u|^p dx\leqslant C\left[\left(\frac{r}{\rho}\right)^n\int_{B(x_0,\rho)}|\nabla u|^p dx+\int_{B(x_0,\rho)}|\nabla u-\nabla v|^p dx\right]\ \gamma\leqslant\rho \tag{10}$$

$$⨍_{B(x_0\rho)}|\nabla u-\nabla v|^p dx\leqslant\chi(x_0,\rho)⨍_{B(x_0\rho)}|\nabla u|^p dx \tag{11}$$

$$\chi(x_0,\rho)=C(K)\left[\rho^{p-n}\int_{B(x_0,\rho)}(1+|\nabla u|^p dx\right]^{\delta\sigma/p}\to 0,\ \rho\to 0.$$

$$\int_{B(x_0,r)}|\nabla u|^p dx\leqslant\left[c\left(\frac{r}{\rho}\right)^n+\chi(x_0,\rho)\right]\int_{B(x_0,\rho)}|\nabla u|^p dx,\ \gamma\leqslant\rho \tag{12}$$

根据〔3〕第三章引理2.1，只要$R>0$足够小，(12)隐含

$$\int_{B(x_0,\rho)}|\nabla u|^p dx\leqslant C(\lambda)\left(\frac{\rho}{R}\right)^{n-p+p\lambda}\int_{B(x_0,R)}|\nabla u|^p dx,\ \rho\leqslant R \tag{13}$$

其中$\lambda\in(0,1)$可以是任意接近1的常数，$C(\lambda)>0$ 除了依赖于n,N,p,K,σ外还依赖于λ。由（8）、（10）

$$\int_{B(x_0,r)}|\nabla v-(\nabla v)_{x_0r}|^p dx\leqslant C\left(\frac{r}{\rho}\right)^{n+p\gamma}\int_{B(x_0,\rho)}|\nabla v|^p dx$$

$$\leqslant C\left[\left(\frac{r}{\rho}\right)^{n+p\gamma}\int_{B(x_0,\rho)}|\nabla u|^p dx+\int_{B(x_0,\rho)}|\nabla u-\nabla v|^p dx\right] \tag{14}$$

联合(11)、（13）并经过必要的计算，给出

$$\int_{B(x_0,\rho)}|\nabla u-\nabla v|^p dx\leqslant C(R)\rho^{n+\delta\sigma\lambda-p(1-\lambda)} \tag{15}$$

$$C(R)=CR^{(1-\lambda)(p+\delta\sigma)}\left[\fint_{B(x_0,R)}(1+|\nabla u|^p)dx\right]^{1+\frac{\delta\rho}{p}} \tag{16}$$

$$\left(\int_{B(x_0,r)}|\nabla u-(\nabla u)_{x_0,r}|^2dx\right)^{p/2}\leqslant Cr^{n\left(\frac{p}{2}-1\right)}\left(\int_{B(x_0,r)}|\nabla v-(\nabla v)_{x_0r}|^p dx+\int_{B(x_0,\rho)}|\nabla u-\nabla v|^p dx\right)$$

$$\leqslant Cr^{n\left(\frac{p}{2}-1\right)}\left[\left(\frac{r}{\rho}\right)^{n+p\gamma}\left(\frac{\rho}{R}\right)^{n-p+p\gamma}\int_{B(x_0,R)}|\nabla u|^p dx+C(R)\rho^{n+\delta\sigma\lambda-p(1-\lambda)}\right] \tag{17}$$

一开始，取$\lambda\in(0,1)$充分接近1，使$\frac{1-\lambda}{\gamma}<n^{-1}(\delta\sigma\lambda-p(1-\lambda))$。然后取$\theta>0$满足$\frac{1-\lambda}{\gamma}<\theta<n^{-1}(\delta\sigma\lambda-p(1-\lambda))$。不妨设$R\leqslant 1$，对任意$r<R$取$\rho<R$使$r=\rho^{1+\theta}\leqslant\rho<R$。根据（17），成立

$$\left(\int_{B(x_0,r)}|\nabla u-(\nabla u)_{x_0,r}|^2dx\right)^{p/2}\leqslant Cr^{\frac{p}{2}(n+2\beta)}\left[R^{p-p\lambda}\fint_{B(x_0,R)}|\nabla u|^p dx+C(R)\right] \tag{18}$$

其中,$C(R)$由（16）给出，$\beta=\min\left\{\frac{\theta\gamma-1+\lambda}{1+\theta},\ \frac{\delta\sigma\lambda-p(1-\lambda)-n\theta}{p(1+\theta)}\right\}>0$。由于Lebesque积分的绝对连续性，根据（18）存在$\tilde{\rho}>0$充分小，使$x\in B(x_0,\tilde{\rho})$时成立

$$\int_{B(x,r)}|\nabla u-(\nabla u)_{x,r}|^2dx\leqslant Cr^{n+2\beta}\left[R^{p-p\lambda}\fint_{B(x_0,2R)}|\nabla u|^p dx+C(2R)\right]^{2/p},\quad r\leqslant R.$$

这隐含了∇u在$B(x_0,\tilde{\rho})$满足正指数β的一致Hölder条件。这样，$u\in C^{1,\beta}(G_0,E^N)$。又从$G_0$的定义直接可得$\mathrm{mes}(G/G_0)=0$，证讫。

参考文献

1 Fusco N, Hutochinson J. Ann Mat Pura Appl, 1989, 155:1～24

2 Uhlenbeck K. Acta Math, 1977, 138:219～240

3 Giaquinta M, Multiple integrals in the calculus of variations and noniinear elliptic systems, Princeton Univ. Press, 1983

4 Giaquinta M, Modica G. Manuscripta Math, 1986, 57:55～99

5 梁鋈廷, 数学杂志, 1990, 10:213～228

On the $C^{1,\beta}$ Partial Regularity for Minimizers of a Functional

*Liang Xiting**

Abstract The $C^{1,\beta}$ Partial regularity is reproved for minimizers of the following functionals

$$I(u,G)=\int_G\left[G^{\alpha\beta}(x,u)g_{ij}(x,u)u^i{}_{,\alpha}u^j{}_{,\beta}\right]^{p/2}\mathrm{d}x$$

Keywords vector valued functional, minimizer, partial regularity

* Departmeni of Mathematics, zhongshan University