第31卷 第2期 1992年
中山大学学报(自然科学版)
ACTA SCIENTIARUM NATURALIUM UNIVERSITATIS SUNYATSENI
Vol.31 №.2 1992

投射群环*

邓信德
(中山大学数学系)
司徒子治
(美国伯莱里大学数学系)

摘 要 设R是一个环,G是一个有限群,本文定义了一个R上带因子组f的投射群环RG_f,证明了如果RG_f是R的Galois扩张带由G导出的内Galois群$\overline{G}$,使得R的中心C是R的C-直和项,则CG_f是C上中心Galois代数;还将F. R. DeMeyer关于Azumaya投射群代数的刻划推广到投射群环RG_f.

关键词 Galois扩张,Galois代数,投射群代数,投射群环

1 定义与符号

本文中的环都是有单位元的,模都是么模。如果环A的子环B与A有相同的单位元,则称A是B的扩环。

关于环的可分扩张,环上的可分代数和中心可分代数(或Azumaya代数)的定义见文[2]。

设A是环B的扩环,G是A的一个有限自同构群,称A是B上的Galois扩张带Galois群G,如果

(i) $A^G=B$(其中$A^G=\{a\in A\mid \alpha(a)=a,\ \forall\alpha\in G\}$)

(ii) 存在$\{a_i,b_i\in A\mid i=1,\cdots,m$对某正整数$m\}$

使得$\sum_{i=1}^{m}a_i\alpha(b_i)=\delta_{1\alpha}$ (Kronecker δ),$\forall\alpha\in G$.这$\{a_i,b_i\in A\mid i=1,\cdots,m\}$称为$B$上Galois扩张$A$的Galois集。

B上的Galois扩张A称为B上Galois代数,如果B含于A的中心。特别当B等于A的中心时,A称为B上的中心Galois代数。

设C是环R的中心,$U(C)$表示C中所有可逆元组成的乘法群,G是有限群,映射$f:G\times G\longrightarrow U(C)$称为一个因子组,如果$f(\alpha\beta,\gamma)f(\alpha,\beta)=f(\alpha,\beta\gamma)f(\beta,\gamma),\forall\alpha,\beta,\gamma\in G$.投射群环$RG_f$是一个环并且是以$\{U_\alpha\mid\alpha\in G\}$为基的自由$R$-模$\sum_{\alpha\in G}RU\alpha$,其运算是:

$rU_\alpha=U_\alpha r$,$U_\alpha U_\beta=U_{\alpha\beta}f(\alpha,\beta),\forall r\in R,\forall\alpha,\beta\in G$,其中$f:G\times G\longrightarrow U(C)$是一个因子组。

本文1989年3月21日收到

* 中山大学高等学术研究中心资助课题

特别，当R是交换环时，RG_f称为一个投射群代数[2]。文中的RG_f均表示投射群环或投射群代数。

2 正 文

先证明一个引理，说明投射群环与投射群代数的关系。

引理1 1)如果C是环R的中心，$RG_f=\sum_{\alpha\in G}RU_\alpha$是投射群环，则$\sum_{\alpha\in G}CU_\alpha$是投射群代数$CG_f$，并且$RG_f\cong R\otimes_C CG_f$。

2) 如果C是交换环，R是C的扩环，$CG_f=\sum_{\alpha\in G}CU_\alpha$是投射群代数，则$R\otimes_C CG_f=\sum_{\alpha\in G}R(1\otimes U_\alpha)$是投射群环。

证明 1) 显然，$\sum_{\alpha\in G}CU_\alpha$是投射群代数$CG_f$并且映射$\eta: R\otimes_C CG_f\longrightarrow RG_f$，$\sum_{\alpha\in G}r_\alpha\otimes U_\alpha\longmapsto\sum_{\alpha\in G}r_\alpha U_\alpha$是双射且是环同态和$R$-模同态。

2) 由于CG_f是以$\{U_\alpha|\alpha\in G\}$为基的自由C-模，故$R\otimes_C CG_f$是以$\{1\otimes U_\alpha|\alpha\in G\}$为基的自由$R$-模。显然，$(1\otimes U_\alpha)(1\otimes U_\beta)=(1\otimes U_{\alpha\beta})f(\alpha,\beta)$，$r(1\otimes U_\alpha)=(1\otimes U_\alpha)r$，$\forall r\in R$，$\forall\alpha,\beta\in G$，故$R\otimes_C CG_f$是投射群环。

下面的定理表明，如果RG_f是R上带内自同构群的Galois扩张，则CG_f亦然。

定理1 如果环R的中心C是R的C-直和项，投射群环RG_f是R上Galois扩张，带内自同构群$\bar{G}=\{\bar{\alpha}|\bar{\alpha}(x)=U_\alpha xU_\alpha^{-1},\forall x\in RG_f,c\in G\}$，则$CG_f(=\sum_{\alpha\in G}CU_\alpha)$是$C$上中心Galois代数带Galois群$\bar{G}|CG_f\cong\bar{G}$。

证明 由引理1，CG_f是投射群代数。因$\forall\bar{\alpha}\in\bar{G}$，$\forall\sum_{\beta\in G}c_\beta U_\beta\in CG_f$，$\bar{\alpha}(\sum_{\beta\in G}c_\beta U_\beta)$

$=\sum_{\beta\in G}U_\alpha c_\beta U_\beta U_\alpha^{-1}=\sum_{\beta\in G}c_\beta d_{\alpha\beta\alpha^{-1}}U_{\alpha\beta\alpha^{-1}}\in CG_f$，其中$d_{\alpha\beta\alpha^{-1}}\in U(C)$[3]。所以$\bar{G}(CG_f)$

$=CG_f$。若$\bar{\alpha},\bar{\beta}\in\bar{G}$，$\bar{\alpha}|CG_f=\bar{\beta}|CG_f$，则$\bar{\alpha}(U_\gamma)=\bar{\beta}(U_\gamma)$，$\forall\gamma\in G$，且$\bar{\alpha}(r)=r=\bar{\beta}(r)$，$\forall r\in R$。故有$\bar{\alpha}=\bar{\beta}$。从而$\bar{G}|CG_f\cong\bar{G}$。所以$CG_f$是带内自同构群$\bar{G}|CG_f\cong\bar{G}$的投射群代数。往证$CG_f$是$C$-Azumaya代数，由文[1]，$CG_f$是$C$上中心Galois代数带Galois群$\bar{G}|CG_f\cong\bar{G}$。因$RG_f\cong R\otimes_C CG_f$是$R$上Galois扩张，所以$R\otimes_C CG_f$是$R$-可分[4]。由于$C$是$R$的$C$-直和项，故有$CG_f$是$C$-可分[5]。因$(RG_f)^{\bar{G}}=R$，所以$(CG_f)^{\bar{G}}\subset R\cap CG_f=C$，故有$(CG_f)^{\bar{G}}=C$。若$\sum_{\alpha\in G}t_\alpha U_\alpha$属于$CG_f$的中心，则$U_\beta(\sum_{\alpha\in G}t_\alpha U_\alpha)=(\sum_{\alpha\in G}t_\alpha U_\alpha)U_\beta$，$\forall\beta\in G$，于是$\bar{\beta}(\sum_{\alpha\in G}t_\alpha U_\alpha)=\sum_{\alpha\in G}t_\alpha U_\alpha$，$\forall\beta\in G$，即有$\sum_{\alpha\in G}t_\alpha U_\alpha\in(CG_f)^{\bar{G}}=C$。所以$CG_f$的中心是$C$，从而$CG_f$是$C$-Azumaya代数。

推论1 如果R是C-Azumaya代数，投射群环RG_f是R上的Galois扩张带内自同构群$\bar{G}=\{\bar{\alpha}|\bar{\alpha}(a)=U_\alpha aU_\alpha^{-1}，\forall a\in RG_f，c\in G\}$，则$RG_f$是$C$-Azumaya代数。

证明 由引理1，$RG_f\cong R\otimes_C CG$。因R是C-Azamaya代数，所以C是R的中心并且

C是R的C-直和项[6]。因而CG_f是C上中心Galois代数(定理1).从而CG_f是C-Azumaya代数[1]，所以$RG_f\cong R\otimes_C CG_f$是$C$-Azumaya代数[6]。

定理2　如果C是环R的中心，CG_f是C上中心Galois代数带内自同构群$\bar{G}=\{\bar{\alpha}|\bar{\alpha}(x)=U_\alpha xU_\alpha^{-1},\forall x\in CG_f,\alpha\in G\}$，则$R\otimes_C CG_f$是$R\otimes_C C\cong R$上的Galois扩张带Galois群$1\otimes\bar{G}\cong\bar{G}$。

证明　设$\{a_i,b_i\in CG_f|i=1,\cdots,m\}$是$CG_f$的Galois集，即有$\sum_{i=1}^m a_i\bar{\alpha}(b_i)=\delta_{1\bar{\alpha}}$，$\forall\bar{\alpha}\in\bar{G}$。从而$\sum_{i=1}^m(1\otimes a_i)(1\otimes\bar{\alpha})(1\otimes b_i)=1\otimes\sum_{i=1}^m a_i\bar{\alpha}(b_i)=\delta_{1\otimes 1,1\otimes\bar{\alpha}}$，$\forall 1\otimes\bar{\alpha}\in 1\otimes\bar{G}$。所以$\{1\otimes a_i,1\otimes b_i|i=1,\cdots,m\}$是$R\otimes_C CG_f$的Galois集。

由$(CG_f)^{\bar{G}}=C$，往证$(R\otimes_C CG_f)^{1\otimes\bar{G}}=R\otimes_C C$。如果$\sum_i r_i\otimes d_i\in(R\otimes_C CG_f)^{1\otimes\bar{G}}$，因$CG_f$是$C$上Galois扩张带Galois群$\bar{G}$，且$C$是$CG_f$的$C$-直和项，故存在$s\in CG_f$，使得$\sum_{\alpha\in\bar{G}}\bar{\alpha}(s)=1\in CG_f$[4]，从而$\sum_i r_i\otimes d_i=(\sum_i r_i\otimes d_i)(1\otimes\sum_{\alpha\in\bar{G}}\bar{\alpha}(s))=(\sum_i r_i\otimes d_i)(1\otimes\sum_{\alpha\in\bar{G}}\bar{\alpha})(1\otimes s)=(1\otimes\sum_{\alpha\in\bar{G}}\bar{\alpha})(\sum_i r_i\otimes d_i)(1\otimes s)=(1\otimes\sum_{\alpha\in\bar{G}}\bar{\alpha})(\sum_i r_i\otimes d_is)=\sum_i r_i\otimes\sum_{\alpha\in\bar{G}}\bar{\alpha}(d_is)\in R\otimes_C C$，所以$R\otimes_C C\supset(R\otimes_C C\bar{G}_f)^{1\otimes\bar{G}}$。从而有$R\otimes_C C=(R\otimes_C CG_f)^{1\otimes\bar{G}}$。

下面的定理是文[1]中定理3在RG_f上的推广。

定理3　如果C是环R的中心，投射群环RG_f是C-Azumaya代数，则RG_f是R上Galois扩张带内自同构群$\bar{G}=\{\bar{\alpha}|\bar{\alpha}(x)=U_\alpha xU_\alpha^{-1},\forall x\in RG_f,\alpha\in G\}$且$C$是$R$的$C$-直和项。

证明　$RG_f(=\sum_{\alpha\in G}RU_\alpha)$是投射群环，令$\bar{G}=\{\bar{\alpha}|\bar{\alpha}(x)=U_\alpha xU_\alpha^{-1},\forall x\in RG_f,\alpha\in G\}$，因$RG_f\cong R\otimes_C CG_f$(引理1)是$C$-Azumaya代数，所以$R$与$CG_f$均是$C$-Azumaya代数[6]，从而$CG_f$是$C$上中心Galois代数带内自同构群$\bar{G}|CG_f$[1]并且$C$是$R$的$C$-直和项[6]。由定理2，$R\otimes_C CG_f\cong RG_f$是$R\otimes_C C\cong R$的Galois扩张带内自同构群$1\otimes(\bar{G}|CG_f)\cong\bar{G}|CG_f\cong\bar{G}$(定理1)。

以下研究一个包含投射群代数或投射群环的环。

引理2　如果环A是环R上带内自同构群G的Galois扩张，C是A的中心，则$C\subset R$且A包含一个投射群代数$CG_f=\sum_{\alpha\in G}CU_\alpha$，其中$f(\alpha,\beta)=U_\alpha U_\beta U_{\alpha\beta}^{-1}\in U(C)$。

证明　因G是A的内自同构群，所以，$\forall\alpha\in G$，存在$U_\alpha\in A$，使得$\alpha(x)=U_\alpha xU_\alpha^{-1}$，$\forall x\in A$。首先验证$C\subset R$。如果$x\in C$，则$xU_\alpha=U_\alpha x$，$\forall\alpha\in G$。即有$xU_\alpha=\alpha(x)U_\alpha$，$\forall\alpha\in G$。从而$\alpha(x)=x$，$\forall\alpha\in G$。即$x\in A^G=R$。其次，验证$\sum_{\alpha\in G}CU_\alpha\subset A$是一个投射群代数。令

$\sum_{\alpha\epsilon G} r_\alpha U_\alpha=0$,其中 $r_\alpha \epsilon C$.设$\{a_i, b_i \epsilon A | i=1\cdots, m\}$是$A$的Galois集.即有$\sum_{i=1}^{m} a_i\beta(b_i)=\delta_{1\beta}$,

令$\forall\beta\epsilon G$. 故有 $0=\sum_{i=1}^{m} a_i(\sum_{\alpha\epsilon G} r_\alpha U_\alpha)\beta^{-1}(b_i)=\sum_{\alpha\epsilon G} r_\alpha \sum_{i=1}^{m} a_i(\alpha\beta^{-1}(b_i))U_\alpha=\sum_{\alpha\epsilon G} r_\alpha \delta_{\alpha\beta} U_\alpha$

$=r_\beta U_\beta$, $\forall\beta\epsilon G$. 因U_β可逆, 所以 $r_\beta=0, \forall\beta\epsilon G$.

我们证明了$\{U_\alpha | \alpha\epsilon G\}$是$C$-线性无关. 令$f: G\times G\longrightarrow U(c)$, $f(\alpha,\beta)=U_\alpha U_\beta U_{\alpha\beta}^{-1}$, 容易验证$f(\alpha,\beta)\epsilon U(c)$并且$f$是一个因子组. 又因$A^G=R\supset C$, 所以$U_\alpha r=\alpha(r)U_\alpha=rU_\alpha$, $\forall r\epsilon C$, $\forall\alpha\epsilon G$. 因此, $\sum_{\alpha\epsilon G} CU_\alpha=CG_f$是一个投射群代数.

引理 3 设A,R,C,G,CG_f如引理2中所示, 则

(i) 映射$\theta: R\otimes_c CG_f\longrightarrow \sum_{\alpha\epsilon G} RU_\alpha\subset A$, $\sum_{\alpha\epsilon G} r_\alpha\otimes U_\alpha \longmapsto \sum_{\alpha\epsilon G} r_\alpha U_\alpha$

是环的满同态, 也是R-模同态;

(ii) $R\otimes_c CG_f \overset{\theta}{\cong} \sum_{\alpha\epsilon G} RU_\alpha \Longleftrightarrow \{U_\alpha | \alpha\epsilon G\}$是$R$-线性无关. 并且在这种情形下, $\sum_{\alpha\epsilon G} RU_\alpha=RG_f$是一个投射群环.

证明是明显的.

如果环A是环R上的Galois扩张带内自同构群G, 即$\forall\alpha\epsilon G$, 存在$U_\alpha\epsilon A$, 使得$\alpha(x)=U_\alpha x U_\alpha^{-1}$, $\forall x\epsilon A$.又设A包含投射群环$RG_f(=\sum_{\alpha\epsilon G} RU_\alpha)$且$C$是$A$的中心. 由引理2, 有$C\subset R$并且$A$包含一个投射群代数$CG_f$.

定理 4 设环A如上所述, 并且CG_f和R均是C-Azumaya代数, 则$A=RG_f$并且是C-Azumaya代数.

证明 由于CG_f是C-Azumaya代数, 所以CG_f是C上中心Galois代数带Galois群$G|CG_f$[1]. 可以验证$G|CG_f\cong G$. 事实上, 如果$\alpha,\beta\epsilon G$, $\alpha|CG_f=\beta|CG_f$, 则$U_\alpha a U_\alpha^{-1}=U_\beta a U_\beta^{-1}$, $\forall a\epsilon CG_f$, 从而$U_\beta^{-1}U_\alpha a=aU_\beta^{-1}U_\alpha$, $\forall a\epsilon CG_f$, 即$U_\beta^{-1}U_\alpha\epsilon C$. 由引理2的证明, $\{U_\alpha | \alpha\epsilon G\}$是$C$-线性无关, 故有$U_\alpha=U_\beta$, 即得$\alpha=\beta$. 所以, $R\otimes_c CG_f$是R上的Galois扩张(定理2). 因CG_f和R是C-Azumaya代数, 所以$R\otimes_c CG_f$是C-Azumaya代数[6]. 由引理1, $RG_f\cong R\otimes_c CG_f$, 故有$RG_f$也是$C$-Azumaya代数. 由定理3, RG_f是R上带内Golois群$G|RG_f$的Galois扩张, 故存在RG_f的Calois集$\{x_i, y_i | i=1,\cdots,m\}\subset RG_f$, 即$\sum_{i=1}^{m} x_i\alpha(y_i)=\delta_{1\alpha}$, $\forall\alpha\epsilon G|RG_f$, 因$G|RG_f\cong G$, 所以$\sum_{i=1}^{m} x_i\alpha(y_i)=\delta_{1\alpha}$, $\forall\alpha\epsilon G$即$\{x_i, y_i | i=1,\cdots,m\}$也是$A$的Galois集. 因而对于$\forall a\epsilon A$, $a=\sum_{i=1}^{m} x_i t_r(y_i a)$,其中$t_r=\sum_{\alpha\epsilon G}\alpha$[7], 由于$x_i\epsilon RG_f$, $t_r(y_i a)\epsilon A^G=R$, 所以$a\epsilon RG_f$. 故有$A=RG_f$,

参考文献

1 DeMeyer F R. IL J Math, 1966, 10:287～295

2 邓信德，司徒子治．中山大学学报论丛（自然科学）〔10〕,1987, 66～71

3 邓信德，司徒子治．中山大学学报（自然科学版），1989, 1::1～6

4 Miyashita Y. J Fac Sci Hokkaido Univ Ser I, 1966, 19: 114～134

5 Hirata K, Sugano K. J Math Soc Japan, 1966, 4: 360～373

6 DeMeyer F R, Ingraham E. Lecture Notes in Mathematics, 181, Berlin-Heidelberg-New york. Springer-Verlag, 1971

7 DeMeyer F R. Osaka J Math 1965, 2: 117～127

Projective Group Rings

*Deng Xinde** *George Szeto*

Abstract Let R be a ring, and G a finite group. A projective group ring RG_f over R with a factor set f is defined. It is shown that if RG_f is a Galois extension over R with an inner Galois group $\bar{G}$ induced by G such that the center C of R is a C-direct summand of R, then CG_f is a central Galois C-algebra. Also, it is proved that if C is the center of R and if RG_f is an Azumaya C-algebra, then RG_f is a Galois extension over R with an inner Galois group $\bar{G}=\{\bar{\alpha}\mid\bar{\alpha}(x)=U_\alpha xU_\alpha^{-1},\forall x\in RG_f,\alpha\in G\}$ and C is a C-direct summand of R. This generlizes the characterization of Azumaya projective group algebra given by F. R. DeMeyer.

Keywords Galois extension, Galois algebra, projective group algebra, projective group ring

* Department of Mathematics