

富氏级数法解无限长链式周期结构的动力响应*

杨宗炼 蔡承武
(应用力学与工程系)

摘要 借助富里埃级数理论,讨论了具有无限个子结构的链式周期结构的动力分析问题,对具有周期性约束条件的自伴微分方程的解答,给出了按本征函数展开的表达式。

关键词 无限子结构,链式周期结构,富氏级数,动力响应

1 引言

在实际工程中如能充分利用结构的周期性,就能简化这种类型结构的动力响应分析,降低计算费用。目前关于回转周期结构的数值分析方法已基本解决^[1~3]。对于链式周期结构的分析方法常用的有矩阵差分法、迁移矩阵法以及与此有关的 Z 变换方法等^[4],这些方法均要求载荷作用在相邻子结构的界面上。对于任意激励的响应还没有十分有效的分析方法,特别对无限长链式周期结构作数值计算时,通常取有限长计算,由于要消除边界反射波的影响,使计算量成几何级数增长。文[5]应用 U 变换方法解决了有限跨连续梁对任意激励的响应问题,通过取极限得到了无限跨连续梁的分析解。本文借助于富里埃级数理论,直接讨论了无限长链式周期结构的分析解,为任意激励的响应提供了十分有效的分析方法。

2 理论推导

考虑具有均匀抗弯刚度 EI 和每单位长度质量为 ρA 的无限长梁,支承在无穷多个等距分布的滚动支承上(如图1所示)。

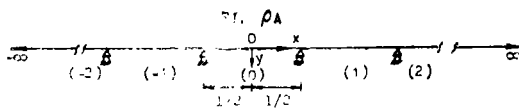


图1 无限连续梁
Fig. 1 Infinite continuous beam

设任意两个相邻支承之间的跨长为 l ,在每一跨内,取局部坐标系 oxy (见图1),原点取在其跨中位置。于是所有子结构的动力方程都具有相同的形式,即

本文1990年12月26日收到

* 国家自然科学基金资助项目

$$EI \frac{\partial^4 W_k(x,t)}{\partial x^4} + \rho A \frac{\partial^2 W_k(x,t)}{\partial t^2} = F_k(x,t), \quad -1/2 < x < 1/2, \\ k = 0, \pm 1, \pm 2, \dots, \infty \quad (1)$$

式中, $W_k(x,t)$ 是横向挠度, $F_k(x,t)$ 是作用在跨内的荷载函数, 下标 k 表示第 k 个子结构对应的函数。由滚动支承处的连续性, 要求满足下列端点条件

$$\left. \begin{aligned} W_k(x,t) \Big|_{x=\pm 1/2} &= 0 \\ \frac{\partial W_k}{\partial x} \Big|_{x=1/2} &= \frac{\partial W_{k+1}}{\partial x} \Big|_{x=-1/2} \\ \frac{\partial^2 W_k}{\partial x^2} \Big|_{x=1/2} &= \frac{\partial^2 W_{k+1}}{\partial x^2} \Big|_{x=-1/2} \end{aligned} \right\} k = 0, \pm 1, \pm 2, \dots, \infty \quad (2)$$

考虑到结构的周期性, 借助复式富氏级数以第 k 个子结构的挠度和荷载函数作为 k 次谐波的振幅因子, 可以形式地构造两个辅助函数

$$\left. \begin{aligned} q(\theta, x, t) &= \sum_{k=-\infty}^{\infty} W_k(x, t) \exp(-ik\theta) \\ f(\theta, x, t) &= \sum_{k=-\infty}^{\infty} F_k(x, t) \exp(-ik\theta) \quad (0 < \theta < \pi) \end{aligned} \right\} \quad (3)$$

由于通常仅考虑有限个子结构的荷载在整个系统中所引起的响应, 不妨设当 $|k| > n$ 时 $F_k = 0$, 所以 $f(\theta, x, t) = \sum_{k=-n}^n F_k(x, t) e^{-ik\theta}$ 变为有限个荷载函数的和, 其存在性不容置疑。对于有限个子结构作用荷载的条件下, 无限远处的 W_k 由实际经验可知其单调减趋于零, 由文[6]可知级数 $\sum_{k=-\infty}^{\infty} W_k e^{-ik\theta}$ 是一致收敛的。下面的命题阐述了 $q(\theta, x, t)$ 和 $W_k(x, t)$ 的解法。

利用(3)式可将方程组(1)及端条件(2)化为定解问题

$$\left. \begin{aligned} EI \frac{\partial^4 q(\theta, x, t)}{\partial x^4} + \rho A \frac{\partial^2 q(\theta, x, t)}{\partial t^2} &= f(\theta, x, t) \\ q(\theta, 1/2, t) &= q(\theta, -1/2, t) = 0 \\ \frac{\partial q}{\partial x} \Big|_{x=1/2} &= \exp(i\theta) \frac{\partial q}{\partial x} \Big|_{x=-1/2}, \quad \frac{\partial^2 q}{\partial x^2} \Big|_{x=1/2} = \exp(i\theta) \frac{\partial^2 q}{\partial x^2} \Big|_{x=-1/2} \end{aligned} \right\} \quad (4)$$

命题 1 若定解问题(4)有解 $q(\theta, x, t)$, 则满足方程组(1)和端点条件(2)的解可表示为

$$W_k(x, t) = \frac{1}{2\pi} \int_{-\pi}^{\pi} \exp(ik\theta) q(\theta, x, t) d\theta = \frac{1}{\pi} \int_0^{\pi} \operatorname{Re}[\exp(ik\theta) q(\theta, x, t)] d\theta \quad (5)$$

证明 由 $q(\theta, x, t)$ 的定义可知 $q(-\pi, x, t) = q(\pi, x, t)$, 且 q 有连续导数, 所以 q 满足 Lipschitz 条件, 因而 q 属于有界变差函数类^[6], 由 Dirichlet-Jordan 判别法可知 $q(\theta, x, t)$ 可展开为一致收敛的富氏级数^[7], 因而微分和积分可交换次序, 于是对(4)式等号两边同乘上 $e^{ik\theta}/2\pi$ 后, 从 $-\pi$ 到 π 积分即得到方程(1)及端条件(2), 这就证明了(5)式所求出的 W_k 确是满足(1)和(2)的第 k 个子结构的响应函数。

下面再讨论将 W_k 用本征函数展开的表达式。

先定义一个辅助函数 $Q(x)$

$$\left. \begin{aligned} \frac{d^4 Q}{dx^4} &= \beta^4 Q \quad \beta \neq 0, \quad -l/2 < x < l/2 \\ Q(l/2) &= Q(-l/2) = 0 \\ \frac{dQ(l/2)}{dx} &= \exp(i\theta) \frac{dQ(-l/2)}{dx} \\ \frac{d^2 Q(l/2)}{dx^2} &= \exp(i\theta) \frac{d^2 Q(-l/2)}{dx^2} \end{aligned} \right\} \quad (6)$$

命题 2 定解问题 (6) 是自伴本征值问题。

证明按照自伴问题的定义易得。由此便可推知满足 (6) 的本征值和本征函数必存在, 且有

$$Q(-\theta) = \overline{Q(\theta)} \quad (7)$$

由自伴本征值问题的基本定理可知

i) 问题 (6) 的本征值 β 必是实数, 对于确定的 θ 值, 其全体构成一可数集, β 与 θ 的关系满足频率方程^[5]

$$\cos\theta[\operatorname{sh}(\beta l) - \sin(\beta l)] + \sin(\beta l)\operatorname{ch}(\beta l) - \operatorname{sh}(\beta l)\cos(\beta l) = 0 \quad (8)$$

当 θ 从 0 到 π 连续变化时, (8) 的第 m 个正根 $\beta_m (m = 1, 2, \dots, \infty)$ 也随之连续变化构成可数个互不交叉的连续频谱带。

ii) 对于固定的 θ , 不同本征值 β_m 所对应的本征函数两两正交, 为了与我们所讨论的问题相对应, 可令其满足下列的正交归一条件

$$\int_{-l/2}^{l/2} \rho A Q_m \cdot \overline{Q_n} dx = \delta_{mn} \quad (9)$$

记 $\beta_m^4 = \rho A \omega_m^2 / EI$, 则由方程 (6) 可得另一关系式

$$\int_{-l/2}^{l/2} EI \frac{d^4 Q_m}{dx^4} \cdot \overline{Q_n} dx = \omega_m^2 \delta_{mn} \quad (9')$$

iii) 若 $f(\theta, x, t)$ 在 $[-l/2, l/2]$ 中平方可积, 则 $f(\theta, x, t)$ 可以依本征函数 $Q_m(\theta, x)$ 展开为一个绝对而且一致平均收敛于 $f(\theta, x, t)$ 的广义富氏级数

$$f(\theta, x, t) = \sum_{m=1}^{\infty} \xi_m(\theta, t) Q_m(\theta, x) \quad (10)$$

其中广义富氏系数 $\xi_m(\theta, t)$ 可用下式表示

$$\xi_m(\theta, t) = \int_{-l/2}^{l/2} \rho A f(\theta, x, t) \cdot \overline{Q_m(\theta, x)} dx \quad (11)$$

命题 3 定解问题 (4) 在零初值条件下的解可用本征函数 $Q_m(\theta, x)$ 展开为

$$q(\theta, x, t) = \sum_{m=1}^{\infty} \frac{Q_m(\theta, x)}{\rho A \omega_m(\theta)} \int_0^t \xi_m(\theta, \tau) \sin \omega_m(t - \tau) d\tau \quad (12)$$

证明 由本征函数的展开定理可设

$$q(\theta, x, t) = \sum_{m=1}^{\infty} T_m(\theta, t) Q_m(\theta, x)$$

代入(4)得

$$\omega_m^2(\theta) T_m(\theta, t) + \frac{d^2 T_m(\theta, t)}{dt^2} = \xi_m(\theta, t) / \rho A$$

由Duhamel 积分便得零初值响应

$$T_m(\theta, t) = \frac{1}{\rho A \omega_m(\theta)} \int_0^t \xi_m(\theta, \tau) \sin \omega_m(t - \tau) d\tau$$

代入 $q(\theta, x, t)$ 的展开式, 命题得证.

注意到命题 1 和命题 3, 可得下列定理

定理 1 满足方程组(1)和边界条件(2)及零初值条件的解可用本征函数 $Q_m(\theta, x)$ 展开, 其展开式为

$$W_k(x, t) = \sum_{m=1}^{\infty} \frac{1}{\pi} \int_0^{\pi} \text{Re} \left[\exp(ik\theta) \cdot \frac{Q_m(\theta, x)}{\rho A \omega_m(\theta)} \int_0^t \xi_m(\theta, \tau) \sin \omega_m(t - \tau) d\tau \right] d\theta \quad (13)$$

推论 1 当 $t = \tau$ 时刻在 0 号子结构 $x = \xi$ 处单独作用一个单位脉冲力时, 第 k 个子结构对应于第 m 个频带的模态子空间的响应为

$$H_m^{(k)}(x, t, \xi, \tau) = \frac{1}{\pi} \int_{\alpha_m(\tau)}^{\alpha_m(\pi)} \text{Re} \left[\exp[ik\theta(\alpha)] Q_m[\theta(\alpha), x] \bar{Q}_m[\theta(\alpha), \xi] \cdot \frac{\sin \Omega \alpha^2 (t - \tau) \cdot \phi(\alpha)}{\Omega \alpha^2} \right] d\alpha \quad (14)$$

式中,

$$\Omega \alpha_m^2 = \omega_m, \quad \Omega = 4/l^2 \cdot \sqrt{EI/\rho A}$$

$$\cos \theta (\text{sh} 2\alpha - \sin 2\alpha) + \text{ch} 2\alpha \sin 2\alpha - \text{sh} 2\alpha \cos 2\alpha = 0 \quad (15)$$

$$\phi(\alpha) = \frac{d\theta}{d\alpha} = \frac{2[(\text{ch} 2\alpha + \cos 2\alpha)(\text{ch} 2\alpha \sin 2\alpha + \text{sh} 2\alpha \cos 2\alpha) - 2(\text{sh} 2\alpha + \sin 2\alpha)]}{(\text{sh} 2\alpha - \sin 2\alpha) \sqrt{2 \text{sh} 2\alpha \sin 2\alpha (\text{ch} 2\alpha \cos 2\alpha - 1)}} \quad (16)$$

推论 2 利用记号 $H_m^{(k)}$ 可将定理 1 的结果改为

$$W_k(x, t) = \sum_{m=1}^{\infty} \int_{-l/2}^{l/2} \left[\int_0^t \sum_{s=-n}^n F_s(\xi, \tau) \cdot H_m^{(k-s)}(x, t, \xi, \tau) d\tau \right] d\xi \quad (17)$$

3 例子

例 1 $F_0(x, t) = \delta(x) \cdot \delta(t)$ $F_n(x, t) = 0, \quad n \neq 0.$

解 这是无限连续梁在零号跨的跨中处, 在 $t = 0$ 时刻作用了一个单位脉冲后的响应问题, 系统如图 2 所示.

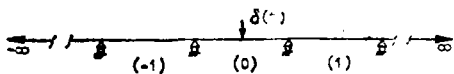


图 2 无限连续梁在 0 号子结构跨中受单位脉冲作用
Fig. 2 In finite continuous beam subjected to a unit impulse on 0 substructure

由推论 1 可知第 k 号子结构的响应可表示为

$$W_k(x, t) = \sum_{m=1}^{\infty} H_m^{(k)}(x, t, 0, 0)$$

式中,
$$H_m^{(k)}(x, t, 0, 0) = \frac{1}{\pi} \int_{\alpha_m^{(0)}}^{\alpha_m^{(\pi)}} \operatorname{Re} \left[\exp(ik\ell(\alpha_m)) Q_m(\theta(\alpha_m), x) \bar{Q}_m(\theta(\alpha_m), 0) \right] \cdot \frac{\sin \Omega \alpha_m^2 t \cdot \phi(\alpha_m)}{\Omega \alpha_m^2} d\alpha$$

满足 (6) 的本征函数

$$Q_m/Q_0 = A(\alpha_m) \sin\left(\frac{2\alpha_m}{l} x\right) + iB(\alpha_m) \cos\left(\frac{2\alpha_m}{l} x\right) - C(\alpha_m) \operatorname{sh}\left(\frac{2\alpha_m}{l} x\right) - iD(\alpha_m) \operatorname{ch}\left(\frac{2\alpha_m}{l} x\right)$$

其中,

$$\begin{aligned} A(\alpha_m) &= \cos[\theta(\alpha_m)/2](\operatorname{ch}\alpha_m \sin\alpha_m + \operatorname{sh}\alpha_m \cos\alpha_m) \operatorname{sh}\alpha_m; \\ B(\alpha_m) &= \sin[\theta(\alpha_m)/2](\operatorname{ch}\alpha_m \sin\alpha_m - \operatorname{sh}\alpha_m \cos\alpha_m) \operatorname{ch}\alpha_m; \\ C(\alpha_m) &= \cos[\theta(\alpha_m)/2](\operatorname{ch}\alpha_m \sin\alpha_m + \operatorname{sh}\alpha_m \cos\alpha_m) \sin\alpha_m; \\ D(\alpha_m) &= \sin[\theta(\alpha_m)/2](\operatorname{ch}\alpha_m \sin\alpha_m - \operatorname{sh}\alpha_m \cos\alpha_m) \cos\alpha_m; \\ Q_0 &= 1/\sqrt{\rho A l M(\alpha_m)}; \end{aligned}$$

$$M(\alpha_m) = \frac{1}{2} (A^2 + B^2 - C^2 + D^2);$$

$$\bar{Q}_m(\theta, 0) = iQ_0 [D(\alpha_m) - B(\alpha_m)].$$

代入化简最后得

$$H_m^{(k)}(x, t, 0, 0) = \int_{\alpha_m^{(0)}}^{\alpha_m^{(\pi)}} [I_1 \sin\left(\frac{2\alpha_m}{l} x\right) + I_2 \cos\left(\frac{2\alpha_m}{l} x\right) - I_3 \operatorname{sh}\left(\frac{2\alpha_m}{l} x\right) - I_4 \operatorname{ch}\left(\frac{2\alpha_m}{l} x\right)] d\alpha$$

式中,

$$I_1 = A(\alpha)[B(\alpha) - D(\alpha)] \sin[k\theta(\alpha)] \cdot \sin(\Omega \alpha^2 t) \cdot \phi(\alpha) / \pi \Omega \alpha^2;$$

$$I_2 = B(\alpha)[B(\alpha) - D(\alpha)] \cos[k\theta(\alpha)] \cdot \sin(\Omega \alpha^2 t) \cdot \phi(\alpha) / \pi \Omega \alpha^2;$$

$$I_3 = C(\alpha)[B(\alpha) - D(\alpha)] \sin[k\theta(\alpha)] \cdot \sin(\Omega \alpha^2 t) \cdot \phi(\alpha) / \pi \Omega \alpha^2;$$

$$I_4 = D(\alpha)[B(\alpha) - D(\alpha)] \cos[k\theta(\alpha)] \cdot \sin(\Omega \alpha^2 t) \cdot \phi(\alpha) / \pi \Omega \alpha^2.$$

例 2 无限连续梁在移动集中力作用下的响应。

解 考虑图 3 所示连续梁在匀速运动的作用力下的响应。

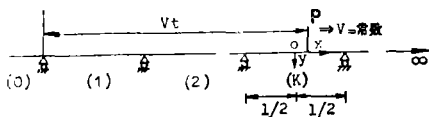


图 3 无限连续梁受移动荷载作用

Fig. 3 Infinite continuous beam subjected to a moving load

此时方程 (1) 中的荷载函数为

$$F_k(x, t) = \begin{cases} P\delta[x + l(k - \frac{1}{2} - t/t_0)], & (k-1)t_0 < t \leq kt_0, \quad t_0 = \frac{l}{V} \\ 0, & t \leq (k-1)t_0, \text{ 或 } t > kt_0 \end{cases}$$

推论 1 中的响应函数为

$$H_m^{(k-N)}(x, t, \xi, \tau) = \frac{1}{\pi} \int_0^\pi \operatorname{Re}[\exp(i(k-N)\theta) Q_m(\theta, x) \bar{Q}_m(\theta, \xi)] \cdot \frac{\sin \omega_m(t-\tau)}{\omega_m} d\theta$$

注意到

$$\begin{aligned} \int_{-l/2}^{l/2} \bar{Q}_m(\theta, \xi) F_N(\xi, \tau) d\xi &= \int_{-l/2}^{l/2} \bar{Q}_m(\theta, \xi) \cdot P\delta\left[\xi + l\left(N - \frac{1}{2} - \frac{\tau}{t_0}\right)\right] d\xi \\ &= P\bar{Q}_m(\theta, V\tau + \frac{l}{2} - Nl) \end{aligned}$$

由(17)式便得第 k 个子结构在时刻 t 时的响应

$$\begin{aligned} W_k(x, t) &= \frac{P}{\pi} \cdot \sum_{m=1}^{\infty} \int_0^\pi \operatorname{Re}\left[\exp(i(k-N)\theta) \cdot \frac{Q_m(\theta, x)}{\omega_m(\theta)} \right. \\ &\quad \left. \cdot \int_0^t \bar{Q}_m(\theta, V\tau + \frac{l}{2} - Nl) \sin \omega_m(t-\tau) d\tau\right] d\theta \quad N-1 < \frac{Vt}{l} \leq N \end{aligned}$$

参 考 文 献

- 1 Thomas D L. Int J Numer Methods Engr, 1979, 14: 81~102
- 2 蔡承武, 吴福光. 中山大学学报(自然科学版), 1983(3): 1~9
- 3 蔡承武, 中山大学学报(自然科学版), 1986(2): 64~72
- 4 A Y T Leung, Dynamic Analysis of Periodic Structures J Sound Vib, 1980, 72(4): 451~467
- 5 Cai C W, Cheung Y K Chan H C. Journal of Sound and Vibration 1988, 123(3): 461~472
- 6 菲赫金哥尔茨 Г М. 微积分学教程, 第 3 卷, 第 3 分册. 北京: 人民教育出版社, 1980, 476, 505
- 7 菲赫金哥尔茨 Г М. 微积分学教程, 第 3 卷, 第 1 分册. 北京: 人民教育出版社. 1980, 71

Finding the Dynamic Response of Infinite Periodic Chain Structures by Fourier Series

Yang Zonglian* Cai Chengwu

Abstract Using the theory of Fourier series, we discuss the dynamic analysis of periodic chain structures with infinite substructure. Thus, we are able to give the eigenfunction expansion of the solution to self-adjoint differential equation with periodic constraint.

Keywords infinite substructures, periodic chain structures, Fourier series, dynamic response

* Department of Applied Mechanics and Engineering