

# 高效低噪二阶状态空间数字 滤波器误差谱成形

陈钧量 刘清南  
(无线电电子学系)

**摘要** 本文给出误差反馈高效计算低舍入噪声(高效低噪)二阶线性状态空间(LSS)数字滤波器的设计方法。对窄带数字滤波,新结构比高效低噪原结构可降低噪声15dB,比原结构的最优LSS实现降低10dB。同时保持了原结构的运算高效性、溢出极限环稳定和低系数灵敏度等特性。用新结构并联实现高阶窄带椭圆滤波器,比用原结构和最优LSS结构的并联实现分别降低噪声13dB和9dB。

**关键词** 数字滤波器,误差谱成形,单位噪声增益

因寄存器和运算器的有限字长效应,窄带递归型数字滤波器将出现很大的运算误差。目前降低这些误差的方法大致分为两类:线性状态空间(LSS)实现和误差谱成形(ESS)。前者包括最优二阶正交滤波器、最优二阶LSS结构<sup>[1]</sup>、次最优二阶LSS结构和高效计算低舍入噪声二阶LSS结构<sup>[2,3]</sup>。在这些降噪实现中,同时获得低系数灵敏度和无溢出振荡或保证抗自溢溢出极限环。后者(ESS)已成功地应用于定点递归型滤波器的直接型实现。最近,出现将ESS结构加入到二阶正交滤波器、任意阶LSS和次最优、最优二阶LSS实现<sup>[4,5]</sup>,并表明对降低滤波器输出舍入噪声是很有成效的。

本文讨论高效低噪二阶LSS数字滤波器加入误差反馈后系统的输出噪声,探讨简单一阶和二阶误差反馈后系统的降噪性能。对高阶窄带椭圆滤波器,给出新结构并联实现的降噪例子,并指出新结构的优点。

## 1 高效低噪二阶LSS数字滤波器

设实现二阶传递函数

$$H(Z) = \frac{\alpha_1 Z + \alpha_2}{Z^2 + \beta_1 Z + \beta_2} = \frac{\alpha}{Z - \lambda} + \frac{\alpha^*}{Z - \lambda^*} \quad (1)$$

式中 $\alpha_1, \alpha_2, \beta_1$ 和 $\beta_2$ 为实数,及

$$\begin{aligned} \alpha &= \alpha_r + j\alpha_i = |\alpha| e^{j\phi_\alpha} \\ \lambda &= \lambda_r + j\lambda_i = |\lambda| e^{j\phi_\lambda} \end{aligned} \quad (2)$$

本文1991年7月4日收到

式(1)的状态空间实现为

$$H(Z) = C'(ZI - A)^{-1}b \quad (3)$$

其中,

$$A = \begin{bmatrix} a_{11} & a_{12} \\ a_{21} & a_{22} \end{bmatrix} \quad b = \begin{bmatrix} b_1 \\ b_2 \end{bmatrix} \quad C = \begin{bmatrix} c_1 \\ c_2 \end{bmatrix}$$

若 $\{A, b, C\}$ 实现 $H(Z)$ , 则

$$A' = T^{-1}AT \quad b' = T^{-1}b \quad C' = T'C \quad (4)$$

同样实现 $H(Z)$ , 其中 $T$ 为任意非奇异 $2 \times 2$ 变换矩阵。可见, 对实现 $H(Z)$ ,  $T$ 的元素代表4个自由度。为防止状态变量溢出, 常采用对角定标变换<sup>[2]</sup>

$$T = \text{diag}\{t_{11}, t_{22}\} \quad (5)$$

式中  $t_{11} = \|F_1(Z)\|_p$        $t_{22} = \|F_2(Z)\|_p$

及  $F_1(Z) = [b_1Z + (a_{12}b_2 - a_{22}b_1)] / (Z^2 + \beta_1Z + \beta_2)$       (6)

$$F_2(Z) = [b_2Z + (a_{21}b_1 - a_{11}b_2)] / (Z^2 + \beta_1Z + \beta_2)$$

这里 $\|\cdot\|_p$ 代表 $L_p$ 范数, 对宽带信号 $p=2$ , 对窄带信号 $p=\infty$ 。  $F_i(Z)$ 是滤波器输入到第 $i$ 个状态变量结点的传递函数。

将式(5)代入式(4)得

$$A' = \begin{bmatrix} a_{11} & \frac{t_{22}a_{12}}{t_{11}} \\ \frac{t_{11}a_{21}}{t_{22}} & a_{22} \end{bmatrix} \quad b' = \begin{bmatrix} b_1/t_{11} \\ b_2/t_{22} \end{bmatrix} \quad C' = \begin{bmatrix} t_{11}c_1 \\ t_{22}c_2 \end{bmatrix} \quad (7)$$

对 $\{A, b, C\}$ 实现 $H(Z)$ , 设舍入误差为方差 $\sigma_e^2$ 的不相关白噪声, 则滤波器输出的合成舍入噪声方差<sup>[3]</sup>

$$\sigma_y^2 = (v_0 + v_1 \|G_1(Z)\|_2^2 + v_2 \|G_2(Z)\|_2^2) \sigma_e^2 \quad (8)$$

式中 $v_0$ 是输出端出现的舍入噪声源数目,  $v_1$ 和 $v_2$ 分别是第一和第二状态变量结点出现的舍入噪声源数目,  $G_i(Z)$ 为第 $i$ 个状态变量结点到输出端的传递函数

$$G_1(Z) = [c_1Z + (a_{21}c_2 - a_{22}c_1)] / (Z^2 + \beta_1Z + \beta_2)$$

$$G_2(Z) = [c_2Z + (a_{12}c_1 - a_{11}c_2)] / (Z^2 + \beta_1Z + \beta_2) \quad (9)$$

对最通常情况 $v_1 = v_2$ , 式(8)变为

$$\sigma_y^2 = (v_0 + v_1 G) \sigma_e^2 \quad (10)$$

式中 $G$ 为该实现的单位舍入噪声增益, 即

$$G = \|G_1(Z)\|_2^2 + \|G_2(Z)\|_2^2 \quad (11)$$

由式(1)、(3)、(5)和最优(最少舍入噪声)二阶LSS数字滤波器的充要条件<sup>[1]</sup>

$$a_{11} = a_{22} \quad \text{和} \quad b_1c_1 = b_2c_2 \quad (12)$$

可得到在 $L_2$ 定标约束下最优二阶LSS实现 $\{A', b', C'\}$ 。再由式(7)、(9)和(11)可得到

$$G'_1(Z) = t_{11}G_1(Z), \quad G'_2(Z) = t_{22}G_2(Z)$$

$$\text{和} \quad G'(Z) = t_{11}^2 \cdot \|G_1(Z)\|_2^2 + t_{22}^2 \cdot \|G_2(Z)\|_2^2 \quad (13)$$

可见, 经定标变换 $T$ 后, 使原来的 $G_1(Z)$ 和 $G_2(Z)$ 分别乘以变换系数 $t_{11}$ 和 $t_{22}$ , 并未改变 $G_1(Z)$ 和 $G_2(Z)$ 的零点位置, 这说明了定标变换不会破坏原结构的最优特性。但这时的单位舍入噪声增益 $G'(Z)$ 已经改变了。

上述变换矩阵 $T$ 的元素代表了4个可供选择的自由度。Bomar提出高效低噪二阶LSS数字滤波器的设计思想是<sup>[3]</sup>, 在式(5)和(12)条件下, 并满足保证极限环稳定和低舍入噪声的充分条件

$$|a_{11} - a_{22}| + |\lambda| \leq 1 \quad (14)$$

通过对设计参数的最优选择, 可以得到实现 $\{A, b, C\}$ 中两个元素为0或2负幂, 从而减少两个系数的相乘运算。然后, 再经定标变换 $t_{11} \geq 1$ 和 $t_{22} \geq 1$ (对 $L_2$ 定标来说是更为保守的定标)和进行系数调整, 使 $\{A', b', C'\}$ 中另外2个元素为2负幂, 再而减少两个系数的相乘运算。这样便提高了计算效率, 同时保证了极限环境稳定和低舍入噪声的二阶LSS滤波器的实现。

高效低噪二阶节的设计过程是繁琐的<sup>[3]</sup>, 但却是一次性工作, 且能用计算机辅助设计, 因此很有实用价值。

作者发现, 对很窄带宽的二阶滤波器, 常会出现按Bomar设计方法选择的设计参数不能满足式(14), 这时, 可利用作者提出的补充方法<sup>1)</sup>, 最终实现 $\{A', b', C'\}$ 中只有5个系数的相乘运算。

## 2 误差谱成形方案

图1为含二阶误差反馈的二阶LSS数字滤波器。设舍入噪声 $e(n)$ 为平稳独立、零均值和等方差 $\sigma_e^2$ 的白噪声。若取量化器输出 $v(n+1)$ 为状态变量, 则可得下面状态方程及其 $Z$ 变换

$$x(n+1) = Ax(n) + A_1e(n) + A_2e(n-1) - e(n+1) + bu(n) \quad (15)$$

$$X(Z) = (ZI - A)^{-1}[(A_2Z^{-1} + A_1 - ZI)E(Z) + bU(Z)] \quad (16)$$

式中 $I$ 为单位矩阵。由此得系统的输出噪声谱

$$Y_e(Z) = C(ZI - A)^{-1}(A_2Z^{-1} + A_1 - ZI)E(Z)$$

则等效噪声谱

$$E'(Z) = (I - A_1Z^{-1} - A_2Z^{-2})E(Z) \quad (17)$$

可知, 适当选择误差反馈系数矩阵 $A_1$ 和 $A_2$ , 即调整式(17)的零点位置, 使更多的噪声能量移入滤波器的阻带, 从而降低通带内的输出噪声。等效噪声谱的零点越接近滤波器的极点, 输出噪声降低越多。

若令

1) 刘清南, 高效低噪二阶LSS数字滤波器的误差谱成形, 中山大学硕士论文, 1990, 6

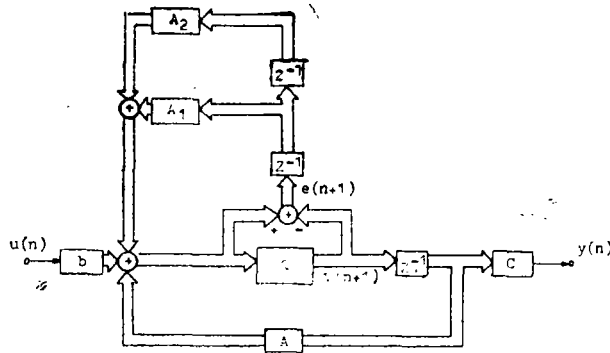


图1 含二阶误差反馈的状态空间结构

Fig.1 Second-order error feedback in a state-space structure

$$A_2 = -I \text{ 和 } A_1 = \text{diag}[a'_k] \tag{18}$$

则第k个状态变量的等效谱成形噪声源为

$$E'_k(Z) = E_k(Z) (1 - a'_k Z^{-1} + Z^{-2}) \tag{19}$$

式(19)的传输零点为

$$Z'_{ok} = e^{\pm j\omega_k}$$

其中  $a'_k = 2 \cos \omega_k$  (20)

当  $A_2 = 0$  时，图1变为一阶ESS框图，由式(19)得

$$E'_k(Z) = E_k(Z) (1 - a'_k Z^{-1}) \tag{21}$$

式(21)的传输零点为

$$Z'_{ok} = a'_k \tag{22}$$

由式(9)和(19)可直观地得到第k(k=1,2)个等效噪声源到输出端的传递函数为

$$G_1^e(Z) = (1 - a'_1 Z^{-1} + Z^{-2}) G_1(Z) \tag{23}$$

$$G_2^e(Z) = (1 - a'_2 Z^{-1} + Z^{-2}) G_2(Z)$$

那么，系统的单位舍入噪声增益可由式(11)导出

$$G^e = \|G_1^e(Z)\|_2^2 + \|G_2^e(Z)\|_2^2 \tag{24}$$

对  $A_2 = 0$  时，可得到类似的结果。

从式(23)和(24)可知，采用ESS技术后，只是将舍入噪声的传输零点引入到它的传递函数中，适当选择引入零点位置，就能降低系统的单位舍入噪声增益，而不影响信号的传递函数，保持了原结构的其它性能。

对于高效低噪二阶LSS数字滤波器的误差谱成形结构，若式(18)的  $a'_k$  按下式取值

$$a'_k = \begin{cases} \pm 1 & \text{(一阶ESS)} \\ 0, \pm 2^{-n} (n=0,1,2,3,4) & \text{(二阶ESS)} \end{cases} \quad (25)$$

即将表1中等效噪声传输零点分别引入到不同的高效低噪二阶节去,则既可降低这些二阶节的输出噪声,又不会带来附加的相乘运算,保持了高效低噪二阶节的计算效率。

表1 等效噪声谱的传输零点

Tab.1 Transmission zeros of the equivalent noise spectra

角度 $\omega_k$ (度)	0	60	75.52	82.82	86.42	88.21	90	91.80	93.60	97.20	104.50	120	180
系数 $a'_k$	1	1	$2^{-1}$	$2^{-2}$	$2^{-3}$	$2^{-4}$	0	$-2^{-4}$	$-2^{-3}$	$-2^{-2}$	$-2^{-1}$	-1	-1
ESS阶数	1	2	2	2	2	2	2	2	2	2	2	2	1

### 3 计算结果

#### 3.1 简单误差反馈的降噪性能

设二阶数字滤波器的传递函数为

$$H(Z) = (Z - Z_0) / [(Z - Z_p)(Z - Z_p^*)] \quad (26)$$

改变其零点 $Z_0$ 和极点 $Z_{p_{1,2}} = re^{\pm j\omega}$ 的位置,即取 $Z_0 = -0.3, -0.6, -1$ 和 $r = 0.90 \sim 0.99, \omega = 5 \sim 35^\circ$ 。求出相应二阶节的最优LSS实现单位舍入噪声增益 $G_{opt}$ 和高效低噪LSS实现单位舍入噪声增益 $G'$ ,对相应的高效低噪二阶节分别加入优选的ESS结构,求出这些误差反馈新二阶节的单位舍入噪声增益 $G^e$ 。为节省篇幅,仅给出图2的计算结果。从图2可知,对窄带滤波,新结构比高效低噪原结构可降低单位噪声增益15dB以上,比原来二阶节最优LSS实现可降低单位噪声增益10dB以上。对改变零点 $Z_0$ 数值,可得到相近的降噪性能。换句话说,对窄带滤波,新结构的降噪性能对滤波器的零点不敏感。二阶节的通带越窄,降噪效果越好。

#### 3.2 高阶窄带椭圆滤波器例子

设高阶递归型数字滤波器的传递函数

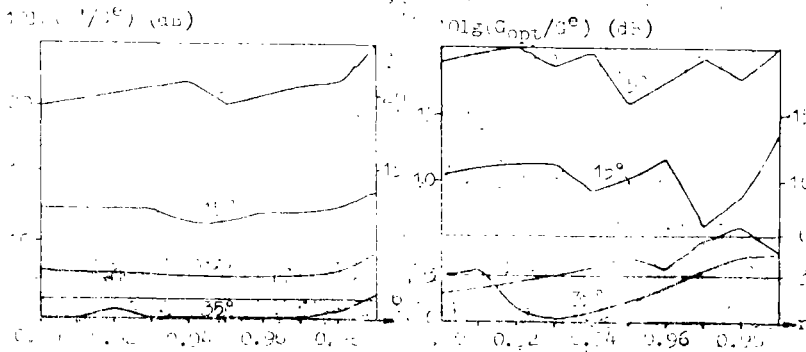


图2 新二阶节的降噪性能 ( $Z_0 = -0.6, \omega = 5 \sim 35^\circ$ )

Fig.2 Noise reduction performance for new second-order sets

$$H(Z) = \sum_{i=1}^N \frac{\alpha_i}{Z - \lambda_i} + d \tag{27}$$

式中 $\lambda_i$ 和 $\alpha_i$ 均为复数， $d$ 为实数。设 $N$ 为偶数时，则式(27)写为

$$H(Z) = \sum_{i=1}^{N/2} \left( \frac{\alpha_i}{Z - \lambda_i} + \frac{\alpha_i^*}{Z - \lambda_i^*} \right) + d \tag{28}$$

对上面 $N/2$ 个二阶节，分别用最优LSS实现和高效低噪LSS实现，并根据每个二阶节的极点，利用表1选择相应的最优ESS结构，分别加入上述高效低噪LSS实现中，用这种新结构来实现窄带低通、窄带带通和窄带带阻椭圆滤波器<sup>[6]</sup>，其设计数据、二阶节的单位噪声增益和降噪比值的计算结果见表2，其中只考虑极点幅角在 $0 \sim 90^\circ$ 内情况。

表2 高阶窄带椭圆数字滤波器新结构的降噪比值

Tab.2 Noise reduction ratio of narrow-band elliptic digital filters with the new structures

设计要求 (频率已 归一化)	极 点 $\lambda = \lambda_r + j\lambda_i$		留 数 $\alpha = \alpha_r + j\alpha_i$		最优 LSS $G_{opt}$	高效低噪 LSS, $G'$	ESS结构 阶数 $a_k'$	新二 阶节 $G^e$	降噪比值* (dB)	
	$\lambda_r$	$\lambda_i$	$\alpha_r$	$\alpha_i$					(1)	(2)
带 通 通带0.235 ~0.245 过渡带宽 0.002	0.0292	0.9969	-0.0005	0.0030	0.6632	0.7267	2 2 <sup>-4</sup>	0.0009	17.74 16.70	
	0.0960	0.0027	0.0009	0.0029	0.6644	0.7950	2 2 <sup>-2</sup>	0.0016		
	0.0342	0.0895	-0.0075	-0.0093	0.7431	0.7865	2 2 <sup>-4</sup>	0.0097		
	0.0901	0.9861	0.0063	-0.0102	0.7443	1.6085	2 2 <sup>-3</sup>	0.0233		
	0.0495	0.9798	0.0250	0.0052	0.9301	0.9308	2 2 <sup>-3</sup>	0.0337		
	0.0738	0.9783	-0.0242	0.0082	0.9299	0.9674	2 2 <sup>-3</sup>	0.0306		
低 通 截止频率 0.040 阻带始频 0.044	0.9615	0.2518	-0.0010	-0.0068	0.7296	1.3534	1 1	0.0752	14.00 11.21	
	0.9457	0.2368	0.0273	0.0123	0.7218	1.3534	1 1	0.0752		
	0.9132	0.1915	-0.0764	0.0438	0.8564	1.4896	1 1	0.0624		
	0.8693	0.0806	0.0513	-0.1611	0.6425	0.9891	1 1	0.0327		
带 阻 阻 带 0.23~0.247 过渡带宽 0.002	0.1032	0.9914	0.0002	0.0037	0.6668	2.1965	2 2 <sup>-2</sup>	0.0053	13.29 9.22	
	0.0219	0.9965	0.0002	0.0038	0.6663	2.2131	2 2 <sup>-4</sup>	0.0043		
	0.1046	0.9794	-0.0180	-0.0027	0.7429	2.1459	2 2 <sup>-2</sup>	0.0543		
	0.0190	0.9847	0.0176	-0.0050	0.7431	0.8054	2 2 <sup>-4</sup>	0.0198		
	0.0913	0.9461	-0.0165	-0.0638	0.9323	2.4445	2 2 <sup>-3</sup>	0.2567		
	0.0283	0.9499	0.0088	-0.0656	0.9320	2.1626	2 2 <sup>-4</sup>	0.2202		

注：通带波纹 $R = 0.1\text{dB}$ ，阻带衰减 $A = 40\text{dB}$ ，\*降噪比值(1)  $10\lg(\Sigma G'/\Sigma G^e)$ ，  
(2)  $10\lg(\Sigma G_{opt}/\Sigma G^e)$

我们还分别设计了多个不同通带（或阻带）宽度的高阶椭圆滤波器例子，计算表明，带宽越窄，新高阶结构的降噪效果越好。

表3列出高阶窄带椭圆数字滤波器相应二阶节的高效低噪LSS实现的矩阵参数和相乘系数的数目。

表3 高效低噪二阶节的矩阵参数  
Tab.3 Matrix parameters of computationally efficient low roundoff noise second-order sets

滤波特性	节序	A		b		C	相乘系数数目
带通	1	$2^{-5}$	-1	0.09762	0	$-2^{-4}$	4
		0.99379	0.02711	0.01696			
	2	0.09598	-1	0.09477	0.01899	$-2^{-4}$	5
		0.98545	0.09598	0			
	3	0.03713	-1	0.15066	0	$2^{-3}$	4
		0.97918	$2^{-5}$	-0.12016			
4	0.08234	-0.97236	$2^{-5}$	$-2^{-3}$	$2^{-3}$	4	
	1	0.09790	0.13157				
5	$2^{-4}$	-1	0.04928	0	$-2^{-1}$	4	
	0.96024	0.03644	$-2^{-1}$	-0.20032			
6	$2^{-4}$	-0.95726	0.26545	-0.18210	$-2^{-4}$	4	
	1	0.08510	0				
低通	1	0.95874	-0.50737	$2^{-3}$	$-2^{-4}$	$2^{-3}$	4
		$2^{-3}$	0.96248	0.04586			
	2	0.96248	-0.22537	$2^{-3}$	$2^{-4}$	$-2^{-2}$	4
		$2^{-2}$	0.92890	-0.18731			
3	0.90574	-0.29367	$2^{-2}$	0	$-2^{-1}$	4	
	$2^{-3}$	0.92074	0.30568				
4	0.90555	$-2^{-4}$	$2^{-1}$	0	0.47518	4	
	$2^{-3}$	0.83313	0.21609				
带阻	1	0.10323	-0.98285	$2^{-4}$	0.00736	$-0.11856$	5
		1	0.10323	0			
	2	0.02185	-0.99301	$2^{-4}$	0.00763	$-0.11958$	5
		1	0.02185	0			
	3	0.09410	-0.95928	$2^{-5}$	$-2^{-6}$	$2^{-2}$	4
		1	0.11410	-0.14213			
4	$2^{-6}$	-0.96961	$2^{-4}$	0	0.15436	4	
	1	0.02246	0.22842				
5	$2^{-4}$	-0.89593	0.26384	$-2^{-3}$	0.45425	4	
	1	0.12000	0				
6	0.05650	-0.90303	0.28160	$2^{-4}$	0.44085	4	
	1	0	0				

## 4 结 论

本文给出误差反馈高效低噪二阶LSS数字滤波器的计算方法, 给出可供选择的简单ESS结构方案。分析计算和例题表明, 对窄带滤波, 新结构比高效低噪原结构的单位噪声增益可降低15dB以上, 比原结构的最优LSS实现可降低10dB以上, 新结构并联实现高阶窄带椭圆滤波器比原结构和最优LSS实现的单位噪声增益可分别降低13dB和9dB以上。

新结构保证在溢出极限环稳定下获得比最优LSS实现更低的单位噪声增益, 同时保持了高效低噪二阶节的运算高效性。新结构的降噪性能对滤波器的零点不敏感, 二阶节的通带越窄, 降噪效果越好。

### 参 考 文 献

- 1 Barnes C W. IEEE Trans CAS, 1984, 31: 602
- 2 Bomar B W. IEEE Trans CAS, 1986, 33: 35
- 3 Bomar B W. IEEE Trans CAS, 1989, 36: 542
- 4 陈钧量, 曾小林. 通信学报, 1989, 10(3): 61
- 5 曾小林, 陈钧量, 中山大学学报(自然科学版), 1989, 28(2): 15~21
- 6 Antoniou A. Digital Filters: Analysis and Design, McGraw-Hill, 1979

## Error Spectrum Shaping in Computationally Efficient Low Noise Second-Order State-Space Digital Filters

Chen Junliang\*    Liu Chingnan

**Abstract** A computationally efficient low roundoff noise second-order linear state-space (LSS) digital filter with error feedback is designed. For narrow-band digital filtering, it is shown that the new structure, retaining the characteristics of the original one, reduces roundoff noise by 15 dB and 10 dB comparing to the original computationally efficient low roundoff noise second-order set and the optimal LSS realization respectively. Examples of high order narrow-band bandpass, lowpass and bandstop elliptic filter demonstrate that parallel realization of the new structures reduces 13 dB and 9 dB in roundoff noise gain comparing with the parallel realization of the original structures and the parallel realization of the optimal LSS structures respectively.

**Keywords** digital filter, error spectrum shaping, unit noise gain

\* Department of Radio and Electronics