

由不完全的投影重建图象

马争鸣

李衍达

(中山大学无线电电子学系)

(清华大学自动化系)

摘 要

本文揭示图象在投影方向上的频谱与图象本身的频谱的关系,特别是投影角度和投影位置对于投影的不同影响,给出了计算实例的验证。

关键词 投影重建图象, 频谱分析, 地震勘探

由投影重建图象的问题,在过去30年里引起人们的广泛兴趣和注意。非破坏性的探伤、测量、勘探等问题,均与由投影重建图象的问题有关。对于大多数的应用领域来说,由于数据采集系统受到种种客观条件的限制,投影往往是不完全的。本文讨论由不完全的投影重建图象所产生的唯一性、数据采集、虚假成像等问题。

1 基本定理

为了讨论由不完全的投影重建图象的问题,提出本文的基本定理,定理表明了图象在投影方向上的频谱与图象本身的频谱的关系^[1]。

设 $\mu(x,y)$ 表示一幅图象。又设

$$v(s,\theta) = \int_{-\infty}^{+\infty} \mu(s\cos\theta - u\sin\theta, u\cos\theta + s\sin\theta) du \quad (1)$$

这里, $-\infty < s < +\infty$, $-\pi/2 \leq \theta < \pi/2$, $v(s,\theta)$ 称为 $\mu(x,y)$ 的Radon变换^[2],为图象 $\mu(x,y)$ 在 (s,θ) 上的投影,投影方向 (s,θ) 规定着信号源和观测器的布置,而投影 $v(s,\theta)$ 就是观测器所采集的数据。又设

$$\bar{\mu}(k_x, k_y) = \iint_{-\infty}^{+\infty} \mu(x,y) \exp[-i2\pi(k_x x + k_y y)] dx dy \quad (2)$$

$\bar{\mu}(k_x, k_y)$ 称为 $\mu(x,y)$ 的二维Fourier变换,也称为图象 $\mu(x,y)$ 的频谱。又设

$$w_{s,\theta}(u) = \mu(s\cos\theta - u\sin\theta, u\cos\theta + s\sin\theta) \quad (3)$$

$w_{s,\theta}(u)$ 表示图象 $\mu(x,y)$ 限制在投影方向 (s,θ) 上变化时的一元函数。又设

$$W_{s,\theta}(k_u) = \int_{-\infty}^{+\infty} w_{s,\theta}(u) \exp(-i2\pi k_u u) du \quad (4)$$

$W_{s,\theta}(k_u)$ 称为 $w_{s,\theta}(u)$ 的一维Fourier变换,也称为图象 $\mu(x,y)$ 在 (s,θ) 的频谱。

本文1990年6月23日收到

式(4)、(3)、(1)表明, 图象在 (s, θ) 上的投影 $v(s, \theta)$ 就是频谱 $W_{s, \theta}(k_u)$ 的直流分量 $W_{s, \theta}(0)$ 。

基本定理: 图像 $\mu(x, y)$ 在投影方向 (s, θ) 上的频谱 $W_{s, \theta}(k_u)$ 与图象本身的频谱 $\bar{\mu}(k_x, k_y)$ 满足关系式

$$W_{s, \theta}(k_u) = \iint_{k_y \cos \theta - k_x \sin \theta = k_u} \bar{\mu}(k_x, k_y) \exp[i2\pi(k_x \cos \theta + k_y \sin \theta)s] dk_x dk_y \quad (5)$$

推论^[1]: 图像 $\mu(x, y)$ 在投影方向 (s, θ) 上的投影 $v(s, \theta)$ 与图象本身的频谱 $\bar{\mu}(k_x, k_y)$ 满足关系式

$$v(s, \theta) = W_{s, \theta}(0) = \iint_{k_y \cos \theta - k_x \sin \theta} \bar{\mu}(k_x, k_y) \exp[i2\pi(k_x \cos \theta + k_y \sin \theta)s] dk_x dk_y \quad (6)$$

图象 $\mu(x, y)$ 在投影方向 (s, θ) 上的投影 $v(s, \theta)$ 是图象在该投影方向上频谱 $W_{s, \theta}(k_u)$ 的直流分量 $W_{s, \theta}(0)$, 因此, $v(s, \theta)$ 损失了 $W_{s, \theta}(k_u)$ 的全部频率信息(直流分量除外)。但是, 图象在一个投影方向 (s, θ) 上的频谱 $W_{s, \theta}(k_u)$ 与图象本身的频谱 $\bar{\mu}(k_x, k_y)$ 不同, 从推论可以看到, $v(s, \theta)$ 是 $\bar{\mu}(k_x, k_y)$ 沿着过原点的直线 $k_y \cos \theta = k_x \sin \theta$ 上的加权积分, 因此, $v(s, \theta)$ 携带了 $\bar{\mu}(k_x, k_y)$ 在这条直线上从高频到低频的全部信息。

从基本定理及其推论可以看到, 图象 $\mu(x, y)$ 在投影方向 (s, θ_1) 上的投影 $v(s, \theta_1)$ 是图象频谱 $\bar{\mu}(k_x, k_y)$ 在直线 $k_y \cos \theta_1 = k_x \sin \theta_1$ 上的加权积分, 而图象 $\mu(x, y)$ 在另一个投影方向 (s, θ_2) 上的频谱 $W_{s, \theta_2}(k_u)$ 则是图象频谱 $\bar{\mu}(k_x, k_y)$ 在直线族 $k_y \cos \theta_2 - k_x \sin \theta_2 = k_u$ (k_u 是参变量)上的加权积分, 由于直线与直线族中每一条直线都相交, 因此, $v(s, \theta_1)$ 携带了 $W_{s, \theta_2}(k_u)$ 从高频到低频的部分信息, 或者说图象在这一投影方向上的低频分量(直流分量)携带了图象在另一投影方向上从高频到低频的部分信息。

2 由不完全的投影重建图象

2.1 唯一性问题

从基本定理的推论可以看到, 投影 $v(s, \theta)$ 仅仅携带图象频谱 $\bar{\mu}(k_x, k_y)$ 在直线 $k_y \cos \theta = k_x \sin \theta$ 上的信息, 只有当直线以原点为轴心旋转一周时, 投影才可能携带图象频谱的全部信息。所谓不完全(有限个)的投影, 也即只有有限条直线覆盖 $\bar{\mu}(k_x, k_y)$, 在这些直线之外 $\bar{\mu}(k_x, k_y)$ 的信息投影根本没有, 因此, 除了 Nyquist 采样定理所指出的情况外, 一般来说, 图象不能由它的不完全(有限个)的投影唯一地重建。

解决唯一性问题的方法是缩小解空间, 也即在 $C(\Omega)$ (连续函数空间, Ω 是定义域)的一个子空间里寻找一个函数, 使得这个函数在给定的投影方向上的投影, 在一定的准则之下(如最小二乘、最大熵之类), 与已知的投影相吻合(对于数据空间来说, 这相当于有限个投影的延拓)。

2.2 数据采集问题

从推论可以看到, 投影角度 θ 和投影位置 s 对于投影的影响是不同的。如果固定投影

角度 θ , 只是改变投影位置 s , 那么, 即便数据采集的间隔很稠密(图1a), 投影充其量也只是把图象频谱在直线上的分量重新组合一下(加权系数)而已, 并不增加直线以外图象频谱的新信息(图1b), 但是, 如果固定投影位置 s , 改变投影角度 θ , 那么, 即便数据采集的间隔很稀疏(图1c), 投影却是图象频谱在不同的直线上的加权积分(图1d)。因此, 在由不完全的投影重建图象时, 投影角度 θ 的变化比投影位置 s 的变化更重要。

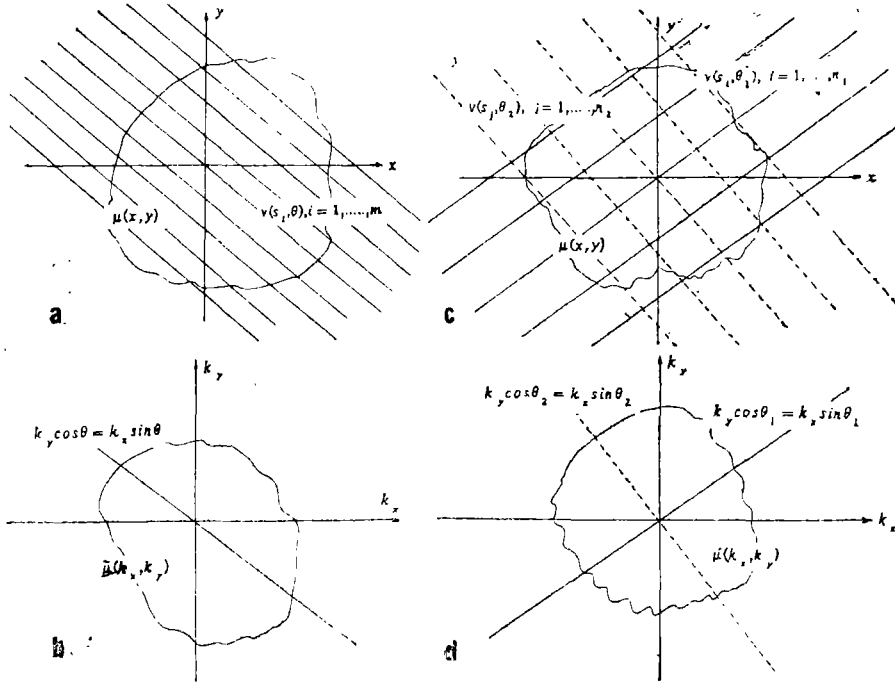


图1 投影位置 s 和投影角度 θ 对投影 $v(s, \theta)$ 的不同影响

Fig.1 The positions and angles of projection play distinct roles

- (a) 固定投影角度, 改变投影位置 (b) 投影只是包含图象频谱在一条直线上的频率信息
(c) 固定投影位置, 改变投影角度 (d) 投影包含图象频谱在不同直线上的频率信息

在地震勘探中, 不同的炮检距代表不同的投影角度(其实一个非零的炮检距代表二个投影角度, 一个由上行射线(波)指示, 另一个由下行射线(波)指示)。因此, 在地震层析成像时, 应当使用包含各个炮检距的迭前地震数据作为投影, 而不是使用迭后地震数据(零炮检距)、或者共炮检距(也称共偏移距)地震数据作为投影, 因为这些地震数据只有一个投影角度。

2.3 虚假成像问题

由不完全的投影重建图象时, 为了保证解的唯一性, 必须缩小解空间, 并且在一定的准则之下挑选解。这样重建的图象, 往往不是真实的图象, 重建图象有别于真实图象的地方即为虚假成像。

从推论可以看到, 投影直线经过原点, 对于不完全(有限个)的投影来说, 虽然直线不能够完全覆盖图象频谱的区域, 但是, 这些直线都经过原点, 在原点周围比较密集, 因此, 不完全(有限个)的投影包含图象频谱的低频成份要比高频成份丰富得多, 由这些投影重建图象时, 低频成份比高频成份更接近真实图象相应的频率成份, 即虚假

成像，多在高频。

3 计算实例

地震勘探中的走时反演是由不完全的投影重建图象的重要例子。走时是慢度 $s(x, z)$ (即地震波传播速度的倒数)的线积分^[3]

$$t(x_s, x_g) = \int_{ray[x_s, x_g, s(x, z)]} s(x, z) d\xi \quad (7)$$

这里， x_s 、 x_g 分别表示炮点、检波点的位置， $ray[x_s, x_g, s(x, z)]$ 表示积分曲线，它是eikonal方程的特征线，称为射线^[4]， $d\xi$ 表示射线的弧长微分。

由于射线与慢度有关，因此，方程(7)是一个非线性的积分方程，我们利用背景慢度 $s_0(x, z)$ 简化方程(7)

$$t(x_s, x_g) \approx \int_{ray[x_s, x_g, s_0(x, z)]} s(x, z) d\xi \quad (8)$$

背景慢度可以利用有关慢度的各种先验知识来构造。

由 $t(x_s, x_g)$ 确定 $s(x, z)$ 是一个由投影重建图象的问题。在实际应用中，只能在地面的有限个位置上布置炮点和检波点，因此，由这些炮、检点所观测到的有限个走时，确定慢度就是一个由不完全的投影重建图象的问题。

为了保证由不完全的投影重建图象的唯一性，用多项式样条^[5]表示慢度

$$s(x, z) = \sum_{i=1}^I s_i \varphi_i(x, z) \quad (9)$$

这里， I 表示多项式样条空间的维数， $\varphi_i(x, z)$ 表示多项式样条空间中的一组基， s_i 表示慢度在这组基下的系数。

把方程(9)代入方程(8)，得到一个线性方程组

$$t = L(s_0) s \quad (10)$$

这里， $t = (t_1, \dots, t_n)^T$ ， $t_k = t(x_{s_k}, x_{g_k})$ ， $k = 1, \dots, n$ ， $s_0 = (s_{01}, \dots, s_{0I})^T$ ， $s = (s_1, \dots, s_I)^T$ ，

$$L(s_0) = \begin{bmatrix} l_{11}(s_0) & \dots & l_{1I}(s_0) \\ \dots & \dots & \dots \\ l_{n1}(s_0) & \dots & l_{nI}(s_0) \end{bmatrix}, \quad l_{ij}(s_0) = \int_{ray[x_s, x_g, s_0]} \varphi_i(x, z) d\xi$$

一般来说，方程(10)是一个超定的线性方程组，没有解，必须在一定准则之下求解，考虑下面的泛函的极值点作为解

$$\Omega(s) = \|L(s_0)s - t\| + y_1 \|s - s_0\| + y_2 \|Bs\| \quad (11)$$

这里，第一项表示解的精度，第二项表示解与背景的偏差，第三项表示解的光滑性(B 表示差分矩阵)， y_1 、 y_2 表示加权系数。

图2、3、4是走时反演的计算实例。图2a表示真实的层速度剖面(图象)，从图中可以看到，图象变化平缓，说明图象的频谱主要集中在低频端。图2b表示图象(层速度剖面，图2a)投影的示意图，为了尽量携带图象的信息，投影按照地震数据采集中共炮集的方式布置。地震波从炮点出发，经界面反射到达炮集中各个检波点所花的时间(走时)就是图象重建时所使用的投影，

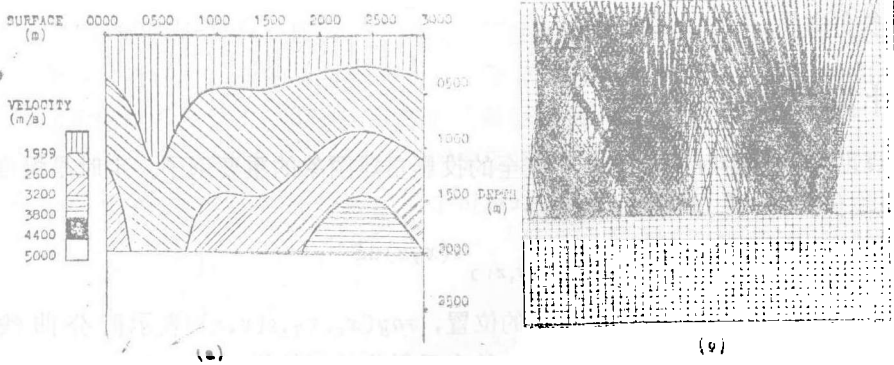


图2 原始图像和合成数据

Fig.2 The original image and synthetic data

(a) 仿真的层速度剖面 (原始图象) (b) 合成数据 (原始图象的投影)

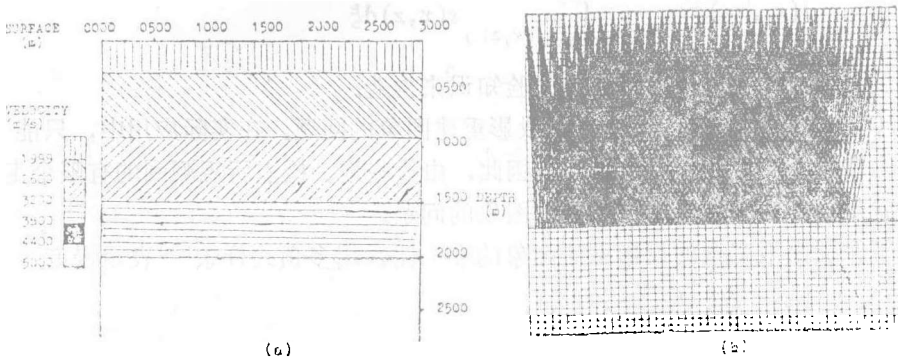


图3 初始图象和初始数据

Fig.3 The initial image and initial data

(a) 做为背景的层速度剖面 (初始图象) (b) 初始数据 (初始图象的投影)

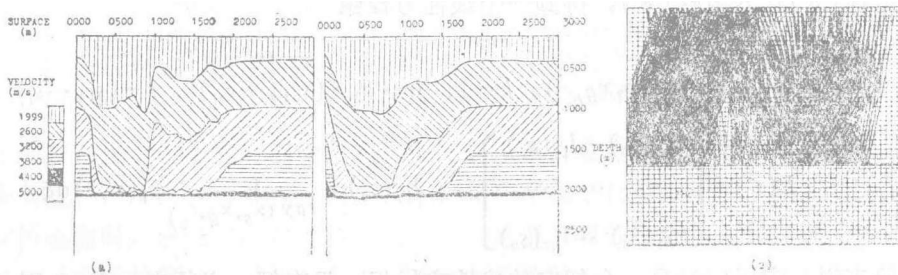


图4 由不完全投影重建的图象

Fig.4 The image reconstructed from incomplete projections

(a) 重建的层速度剖面 (重建的初步图象) (b) 对图象作低通滤波的结果 (c) 图象的投影

图3a表示做为背景的层速度剖面 (图象)。图3b表示图象 (层速度剖面, 图3b) 投影的示意图, 投影的布置与图2b相同, 图中所示的射线就是重建图象时后投影的路径。

图4a表示按照泛函 (方程11) 的极值点重建的图象。比较图4a与图2a可以看到, 重建图象基本上反映了真实图象变化的大致趋势, 但是, 重建图象在不少细节之处变化过于剧烈, 或者说, 重建图象与真实图象在频率域的高频端相差较大, 这是由不完全 (有限) 的投影重建图象所致。图4b表示对图4a所示的图象做低通滤波的结果, 显然, 经过低通滤波后的重建图象更接近真实图象, 图4c表示图象 (层速度剖面, 图4b) 投影的示

意图，投影的布置与图2b相同。投影路径（射线）取决于层速度的导数，因此，投影（射线）图间接反映了层速度导函数的性态。比较图4c与图2b可以看到，经过低通滤波后的重建图象与真实图象在一阶程度上也是大体相近的。

4 结束语

(1) 由投影重建图象，也就是由函数（图象）在一族曲线上的积分（投影）反演函数（图象）本身。对于大多数的应用，往往只能在有限个投影方向上采集数据，由有限个投影重建图象。本文的基本定理揭示了图象在投影方向上的频谱与图象本身的频谱的关系，从基本定理可以看到投影包含了图象频谱的信息、投影角度和投影位置对于投影的不同影响以及不完全（有限个）的投影路径对于图象频谱覆盖的疏密等等。

(2) 图象的投影是图象频谱沿着一条过原点的直线（称为投影直线）的加权积分，直线的斜率只与投影角度有关，与投影位置无关。因此，图象的投影包含了图象频谱在投影直线上的所有频率信息（从低频到高频）。

(3) 在由不完全（有限个）的投影重建图象时，显然，有限条投影直线不可能完全覆盖图象频谱的区域，但是，由于投影直线都经过原点，投影直线在原点附近比较密集，离原点愈远愈稀疏。因此，不完全（有限个）的投影包含图象频谱的低频成份要比高频成份丰富得多，由这些投影重建图象时，自然地，低频成份应当比高频成份更接近真实图象相应的频率成份。

(4) 对于由完全的投影重建图象来说，各种重建算法是等价的，对于由不完全的投影重建图象来说，各种重建算法表现不一，与投影缺失的方向和数量有关。计算实例表明，即便在投影极其不完全的情况下，仍然能够比较满意地重建图象。

参 考 文 献

- 1 马争鸣，非线性、不完全数据的成像及其在震勘中的应用。清华大学工学博士学位论文，1989
- 2 Radon J. Über die Bestimmung von Funktionen durch ihre Integralwerte langs gewisser Mannigfaltigkeiten, Ber Verh Sachs Akad, 1917; 69: 262~277
- 3 Aki K, Richards P G. Quantitative seismology, W H Freeman and Company, 1980
- 4 Cerveny V, Molotkov I A, Psencik I Ray method in seismology, Praha Univ Karlova, 1977
- 5 孙家祖，样条函数与计算几何，科学出版社，1982

Reconstruction of Images from Incomplete Projections

Ma Zhiming* Li Yanda

Abstract

The problem of reconstructing images from incomplete projections is discussed. The theorem shows that the positions and angles of incomplete projections play distinct roles in reconstruction. We apply these conclusions to the procedures in reconstruction, especially the selection and rearrangement of data, the construction of effective algorithms as well as the control of artifacts. The experimental results test and verify these conclusions.

Keywords reconstruction of images, analysis of spectra, seismic exploration

* Department of Radio and Electronics