

· 研究简报 ·

## 一类微分-算子包含的生存问题\*

叶思源

(中山大学数学系)

**摘 要** 给出一类微分-算子包含的可生存解存在的稳定性的两个定理。

**关键词** 生存问题, 集值分析, 微分-算子包含, 相依锥

法国数学家Aubin考虑到经济系统和生物系统的不确定性, 提出了微分包含的生存理论, 近年来引起广泛的注意<sup>[1~4]</sup>。本文给出一类微分-算子包含的可生存解存在的稳定性的两个定理, 推广了文[4]的一个结果。

设 $X, Y$ 都是Hausdorff局部凸空间, 集值映射 $F: X \rightrightarrows Y$ , 如果 $F$ 的定义域 $\text{Dom}F = \{x \in X | F(x) \neq \emptyset\}$ 是非空的, 则称 $F$ 为真(proper)映射。如果对于 $Y$ 中每一个开集 $V$ , 集 $\{x \in X | F(x) \subset V\}$ 是 $X$ 的开集, 则称 $F$ 为上半连续映射。

设 $X$ 为Banach空间, 在 $X$ 的非空子集族 $2^X \setminus \{\emptyset\}$ 中引入Hausdorff距离

$$h(A, B) = \max \{ \sup \{ d(a, B), a \in A \}, \sup \{ d(b, A), b \in B \} \} \quad (1)$$

其中,  $d(a, B) = \inf \{ \|a - b\|, b \in B \}$ ,  $d(b, A) = \inf \{ \|b - a\|, a \in A \}$ 。

设 $A_n, A \in 2^X \setminus \{\emptyset\}$ , 如果

$$\lim_{n \rightarrow \infty} d(A_n, A) = 0,$$

则称集列 $\{A_n\}$ 在Hausdorff意义下收敛于 $A$ , 记为 $A_n \xrightarrow{h} A$ 。

对于集 $M \subset X$ , 以 $\text{Int}M$ 表示 $M$ 的内部。

**引理 1**<sup>[3]</sup> 设

- (i)  $X$ 是自反的Banach空间。
- (ii)  $S(t): X \rightarrow X, t \geq 0$ , 是在 $X$ 上的有界线性算子的紧可微半群。
- (iii)  $-A$ 是 $S(t)$ 的无穷小生成元。
- (iv)  $K \subset X$ 是 $X$ 的紧子集。
- (v)  $F: K \rightrightarrows X$ 是取紧凸值的真上半连续集值映射。

那么, 生存问题

$$x'(t) + Ax(t) \in F(x(t)), \forall a.e. t \geq 0$$

本文1990年11月7日收到

\* 此研究计划由中山大学高等学术研究中心基金会资助

$$x(0) = x_0 \in K \quad (2)$$

$$\forall t \geq 0, x(t) \in K$$

对所有  $x_0 \in K$  有解

$$x(\cdot) \in W_{\lambda}^{\infty}(K, X) := \{x(\cdot) \in L^{\infty}(0, \infty; K) \mid x'(\cdot) + Ax(\cdot) \in L^{\infty}(0, \infty; X)\} \quad (3)$$

的充分必要条件是成立切性条件

$$\forall x \in K, F(x) \cap T_x^{\circ}(x) \neq \phi \quad (4)$$

其中

$$T_x^{\circ}(x) := \{v \in X \mid \liminf_{h \rightarrow 0^+} \frac{d(S(h)x + hv, K)}{h} = 0\} \quad (5)$$

及

$$d(y, K) := \inf_{z \in K} \|z - y\|$$

本文在引理 1 的基础上, 根据集值分析和集列收敛的性质得到如下结果.

**定理 1** 设

- ①  $X$  是自反的 Banach 空间.
- ②  $S(t): X \rightarrow X, t \geq 0$ , 是在  $X$  上的有界线性算子的紧可微半群.
- ③  $-A$  是  $S(t)$  的无穷小生成元.
- ④  $K \subset X$  是  $X$  的紧凸子集, 且  $\text{Int}K \neq \phi$ .
- ⑤  $F_n, F: K \rightrightarrows X$  是取紧凸值的真上半连续集值映射, 且  $F_n(x) \xrightarrow{h} F(x)$  对所有  $x \in K$
- ⑥ 对于每一个  $n \geq 1$ , 生存问题

$$\begin{aligned} x_n'(t) + Ax_n(t) &\in F_n(x_n(t)), \quad \forall a.e. t \geq 0 \\ x_n(0) &= x_0 \\ \forall t \geq 0, x_n(t) &\in K \end{aligned} \quad (6)$$

对所有  $x_0 \in K$  有解

$$x_n(\cdot) \in W_{\lambda}^{\infty}(K, X),$$

那么, 生存问题 (2) 对所有  $x_0 \in K$  有解

$$x(\cdot) \in W_{\lambda}^{\infty}(K, X).$$

定理 1 的证明用到下列引理.

**引理 2** 设  $K$  是  $X$  的闭凸子集,  $\text{Int}K \neq \phi$ ,  $\{S_n\}$  是  $X$  的闭凸子集列, 如果  $S_n \xrightarrow{h} S$ ,

那么  $S_n \cap K \xrightarrow{h} S \cap K$ .

**引理 3** 在定理 1 的条件下, 相依锥  $T_x^{\circ}$  是  $X$  的闭凸集, 且当  $x \in D(A) \cap K$  时成立

$$\text{Int } T_K^s(x) \neq \phi \tag{7}$$

引理 2 与引理 3 的证明都是直接的。

**定理 1 的证明** 从定理 1 的条件及引理 1 可知对  $n \geq 1$  成立

$$F_n(x) \cap T_K^s(x) \neq \phi \quad \forall x \in K \tag{8}$$

由引理 3 及  $F_n(x)$  为紧凸集, 据引理 2 得到

$$F_n(x) \cap T_K^s(x) \xrightarrow{h} F(x) \cap T_K^s(x) \tag{9}$$

以  $K_0(X)$  表示  $X$  的非空紧子集族, 文 [5] 指出:  $(K_0(X), h)$  为完全度量空间, 于是由 (8) 与 (9) 式得到

$$F(x) \cap T_K^s(x) \neq \phi. \tag{10}$$

再一次应用引理 1 便得知生存问题 (2) 对所有  $x_0 \in K$  有解  $x(\cdot) \in W_A^-(K, X)$ . 证毕.

以下考虑  $F$  依赖于自变量  $t$  的生存问题.

**定理 2** 设定理 1 的条件①、②、③成立, 且

④'  $K: [0, T] \rightrightarrows X$  有紧凸图, 且  $\text{Int} K(t) \neq \phi (t \in [0, T])$ .

⑤'  $F_n, F: \text{graph}(K) \rightrightarrows X$  是取紧凸值的真上半连续集值映射, 且  $F_n(t, x) \xrightarrow{h} F(t, x)$  对所有  $(t, x) \in \text{graph}(K)$ .

⑥' 对于每一个  $n \geq 1$ , 生存问题

$$\begin{aligned} x_n'(\cdot) + Ax_n(\cdot) &\in F_n(\cdot, x_n(\cdot)) \quad \forall a.e. \ t \in [0, T] \\ x_n(0) &= x_0 \in K(0) \\ \forall t \in [0, T] \quad x_n(t) &\in K(t) \end{aligned} \tag{11}$$

对所有  $x_0 \in K(0)$  有解

$$\begin{aligned} x_n(\cdot) \in W_A^-(0, T; X) := \{ &x_n(\cdot) \in L^-(0, T; X) \mid x_n'(\cdot) \\ &+ Ax_n(\cdot) \in L^-(0, T; X) \}. \end{aligned}$$

那么, 生存问题

$$\begin{aligned} x'(t) + Ax(t) &\in F(t, x(t)) \quad \forall a.e. \ t \in [0, T] \\ x(0) &= x_0 \in K(0) \\ \forall t \in [0, T] \quad x(t) &\in K(t) \end{aligned} \tag{12}$$

对所有  $x_0 \in K(0)$  有解

$$x(\cdot) \in W_A^-(0, T; X).$$

为了证明定理 2, 只要仿照文 [3] 引入

$$\hat{K} := \text{graph } K = \{ (t, x) \in [0, T] \times X \mid x \in K(t) \}$$

并定义  $\hat{F}: \hat{K} \rightrightarrows R_+ \times X$  为

$$\hat{F}(t, x) := (1, F(t, x)),$$

及  $\hat{A}: D(\hat{A}) \subset R_+ \times X \rightarrow X$  为

$$\hat{A}(t, x) := (0, Ax),$$

置  $y := (t, x)$ , 将生存问题(11)及(12)化为如下形式等价的生存问题

$$\begin{aligned} y'(\tau) + \hat{A}y(\tau) &\in \hat{F}(y(\tau)) \\ y(0) &= (0, x_0) \in \hat{K} \\ \forall \tau \in [0, T] \quad y(\tau) &\in \hat{K} \end{aligned} \quad (13)$$

(13)与(6)一样右端不显含自变量的生存问题,应用定理1并考虑上列变换即得定理2.

### 参 考 文 献

- 1 Aubin J P, Cellina A. Differential Inclusions. Springer-Verlag, Berlin, 1984. 172~280
- 2 Aubin J P. Viability Theory, Preprint, 1990
- 3 Shi Shuzhong, Viability Theorems for a class of Differential-Operator Inclusions, J. Diff. Eqs. 1989, 79: 232~257
- 4 Papageorgiou N S. Viable and Periodic Solutions for Differential Inclusions in Banach Spaces. Kobe J. Math. 1988, 5: 29~42
- 5 Klein E, Thompson A C. Theory of Correspondences, Wiley, New York, 1984

## Viability Problem for a Class of Differential-Operator Inclusions

Ye Siyuan\*

**Abstract** We present two stability theorems on the existence of viable solutions for a class of differential-operator inclusions, and thus generalize a result of [4]

**Keywords** viability problem, set analysis, differential-operator inclusion, contingent cone

\* Department of Mathematics, Zhongshan University