

配乘矩阵特征值反问题 可解的充分条件*

黎 罗 罗

(中山大学计算机科学系, 广州 510275)

摘 要 设 A 为 n 阶半正定 Hermite 矩阵. 求非负实对角矩阵 C , 使得矩阵 CA 具有预先指定的非负实特征值. 本文给出几组使这一反问题有解的充分条件, 当 $n=2$ 时, 给出的这些条件又都成为该反问题可解的必要条件.

关键词 Hermite 矩阵, 特征值, 反问题, 不动点原理, 优超, 非负矩阵

分类号 O241.6

1 问题与主要结果

设以 H_n 表示所有 n 阶 Hermite 矩阵的集合. 考虑下述配乘矩阵特征值反问题:

(MH) 设 $A = (a_{ij}) \in H_n$, 且 A 半正定, 又设 $\lambda_1 \leq \lambda_2 \leq \dots \leq \lambda_n$ 为给定非负实数. 求非负实对角矩阵 C 使得矩阵 CA 具有特征值 $\lambda_1, \lambda_2, \dots, \lambda_n$, 不失一般性可设 $a_{ii} = 1 (i = 1, 2, \dots, n)$, (见文[1]的说明).

文[2~5]曾讨论过使得反问题(MH)可解的充分条件, 本文将给出几组新的充分条件.

文中以 $\lambda_k(B)$ 记 Hermite 矩阵 B 依升序排列的第 k 个特征值. 对 $B = (b_{ij})$, 记 $|B| = (|b_{ij}|)$. 对 $B = (b_{ij}) \in H_n$, 用 $\rho(B)$ 记它的谱半径; 以 $m(B)$ 记 $\max\{|b_{ij}| | i \neq j\}$; 以 $g(B)$ 记 B 的最大 Gerschgorin 圆盘半径, 即 $g(B) = \max_{1 \leq i \leq n} \{\sum_{j \neq i} |b_{ij}|\}$; 又记 $B^o = B - \text{diag}(b_{11}, b_{22}, \dots, b_{nn})$. 对 $1 \leq k < s \leq n$, 以 $A[k, k+1, \dots, s]$ 记 $A \in H_n$ 的主子矩阵, 它的元素由 A 的第 $k, k+1, \dots, s$ 行和列的元素组成. 记

$$\rho_{k,s}(A) = \rho(A[k, k+1, \dots, s]);$$

* 收稿日期: 1992-04-10; 完成修改日期: 1993-01-03

$$\begin{aligned}
r_{i,n}(A) &= g(A[k, k+1, \dots, s]); \\
m_{k,n}(A) &= m(A[k, k+1, \dots, s]); \\
m_k(A) &= \max\{m_{1,k+1}(A), m_{k,n}(A)\}.
\end{aligned}$$

定理 1 设(i) $A = (a_{ij}) \in H_n$ 半正定且 $a_{ii} = 1 \quad (i = 1, 2, \dots, n)$;

(ii) $0 \leq \lambda_1 \leq \lambda_2 \leq \dots \leq \lambda_n$;

(iii) 对 $k = 1, 2, \dots, n-1$ 成立

$$\lambda_{k+1} - \lambda_k \geq [\rho_{1,k+1}(|A^{(0)}|) + \rho_{k,n}(|A^{(0)}|)](\lambda_n + \lambda_{n-1})/2 \tag{1}$$

则问题(MH)必可解.

定理 2 设(i), (ii)同定理 1, 又(iii)对 $k = 1, 2, \dots, n-1$ 成立

$$\lambda_{k+1} - \lambda_k \geq [r_{1,k+1}(A) + r_{k,n}(A)](\lambda_n + \lambda_{n-1})/2 \tag{2}$$

则问题(MH)必可解.

定理 3 设(i), (ii)同定理 1, 又(iii)对 $k = 1, 2, \dots, n-1$ 成立

$$\begin{aligned}
\lambda_{k+1} - \lambda_k \geq \{ & (k\lambda_n + \lambda_{n-1} + \dots + \lambda_{n-k})m_{1,k+1}(A) \\
& + [(n-k)\lambda_n + \lambda_{n-1} + \dots + \lambda_k]m_{k,n}(A)\}/2
\end{aligned} \tag{3}$$

则问题(MH)必可解.

定理 4 设(i), (ii)同定理 1, 又(iii)对 $k = 1, 2, \dots, n-1$ 成立

$$\lambda_{k+1} - \lambda_k \geq (n\lambda_n + 2\lambda_{n-1} + \lambda_{n-2} + \dots + \lambda_1)m_k(A)/2 \tag{4}$$

则问题(MH)必可解.

注 1 与文[2~5]相仿, 本文(1)~(4)将问题(MH)可解的充分条件表达为 $\lambda_{k+1} - \lambda_k \geq q_k$ 的形式. 但在[2~5]中, q_k 均表现为依赖于矩阵 A 及 λ_n (n 个预指值中的最大值)的式子, 本文(1), (2)的 q_k 则出现了 λ_{n-1} , (3), (4)的 q_k 则出现多个 λ_i 或全体 λ_i , 使更细微地反映出多个预指值对问题(MH)可解性的影响.

注 2 有意思的是, 当 $n = 2$ 时, (1)~(4)成为 $\lambda_2 - \lambda_1 \geq (\lambda_1 + \lambda_2)|a_{12}|$. 这又是 $n = 2$ 时问题(MH)可解的必要条件(见[1]). 即当 $n = 2$ 时, 这几组条件是既充分又必要的.

2 定理的证明

引理 1 设矩阵 $X = \text{diag}(x_1, x_2, \dots, x_n)$ 其中 $x_1 \leq x_2 \leq \dots \leq x_n$; $B = (b_{ij}) \in H_n$, 其中 $b_{ii} = 0 (i = 1, 2, \dots, n)$, 又矩阵 $A = X + B$, 则

$$\begin{aligned}
\lambda_{k+1}(A) - \lambda_k(A) - x_{k+1} + x_k & \leq \lambda_{\max}(B[1, 2, \dots, k+1]) \\
& - \lambda_{\min}(B[k, \dots, n])
\end{aligned} \tag{5}$$

证明 由 Cauchy-Poincare 分隔不等式知^[6]

$$\lambda_{\min}(A[k, \dots, n]) \leq \lambda_k(A) \leq \lambda_{\max}(A[1, 2, \dots, k])$$

又由 Weyl 定理[6]知

$$\begin{aligned}
\lambda_{\max}(A[1, 2, \dots, k+1]) & \leq x_{k+1} + \lambda_{\max}(B[1, 2, \dots, k+1]) \\
\lambda_{\min}(A[k, \dots, n]) & \geq x_k + \lambda_{\min}(B[k, \dots, n])
\end{aligned}$$

由上面 3 个不等式导得(5). 证毕.

引理 2 设矩阵 $X = \text{diag}(x_1, x_2, \dots, x_n)$, 其中 $0 \leq x_1 \leq x_2 \leq \dots \leq x_n$; $B = (b_{ij}) \in H_n$, 其中 $b_{ii} = 0$ ($i = 1, 2, \dots, n$). 于是

$$\rho(X^{1/2} B X^{1/2}) \leq \rho(|B|)(x_n + x_{n-1})/2 \quad (6)$$

证明 因为矩阵 $|X^{1/2} B X^{1/2}|$ 与矩阵 $\sqrt{x_n x_{n-1}} |B| - |X^{1/2} B X^{1/2}|$ 都是非负矩阵. 由非负矩阵谱半径的理论^[6]知

$$\begin{aligned} \rho(X^{1/2} B X^{1/2}) &\leq \rho(|X^{1/2} B X^{1/2}|) \leq \rho(\sqrt{x_n x_{n-1}} |B|) \\ &= \sqrt{x_n x_{n-1}} \rho(|B|) \leq \rho(|B|)(x_n + x_{n-1})/2 \quad \text{证毕.} \end{aligned}$$

借助非负矩阵谱半径的理论还可证明下述引理 3, 4.

引理 3 设 $0 \leq x_1 \leq x_2 \leq \dots \leq x_n$, 又设 $y_{ij} = (1 - \delta_{ij}) \sqrt{x_i x_j}$ ($i, j = 1, 2, \dots, n$). 于是矩阵 $Y = (y_{ij})$ 的谱半径 $\rho(Y) \leq \sqrt{x_n} (\sqrt{x_1} + \sqrt{x_2} + \dots + \sqrt{x_{n-1}}) \leq [(n-1)x_n + x_{n-1} + \dots + x_1]/2$.

引理 4 设同引理 2, 则

$$\lambda_{\max}((X^{1/2} B X^{1/2})[1, 2, \dots, k+1]) \leq m_{1, k+1}(B)[k x_{k+1} + x_k + \dots + x_1]/2 \quad (7)$$

$$\lambda_{\min}((X^{1/2} B X^{1/2})[k, \dots, n]) \geq -m_{k, n}(B)[(n-k)x_n + x_{n-1} + \dots + x_k]/2 \quad (8)$$

定理 1 的证明 对预先给定的向量 $\lambda = (\lambda_1, \lambda_2, \dots, \lambda_n)$ 定义

$$D(\lambda) = \{x = (x_1, x_2, \dots, x_n) \in R^n : x > \lambda, x_1 \leq x_2 \leq \dots \leq x_n\}$$

这里记号 $u > v$ 表示实向量 u 优超 v , 见[6]. 不难验证 $D(\lambda)$ 是 R^n 中之非空有界凸闭集: 对 $x \in D(\lambda)$ 定义矩阵 $X = \text{diag}(x_1, x_2, \dots, x_n)$, 由 $x > \lambda$ 知 X 必为非负对角实矩阵. 另记

$A(x) = X^{1/2} A X^{1/2}$, 则 $A(x)$ 为 Hermite 矩阵且与 XA 有相同的特征值, 将它们按升序记为 $\lambda_1(x) \leq \lambda_2(x) \leq \dots \leq \lambda_n(x)$, 又记 $\lambda(x) = (\lambda_1(x), \lambda_2(x), \dots, \lambda_n(x))$, 定义 $D(\lambda) \rightarrow R^n$ 的连续映射 $f(x) = \lambda + x - \lambda(x)$, 因为 $A(x) = X + X^{1/2} A^{(0)} X^{1/2}$, 用引理 1~2 有

$$\begin{aligned} &\lambda_{k+1}(x) - x_{k+1} - \lambda_k(x) + x_k \\ &\leq \lambda_{\max}((X^{1/2} A^{(0)} X^{1/2})[1, 2, \dots, k+1]) - \lambda_{\min}((X^{1/2} A^{(0)} X^{1/2})[k, \dots, n]) \\ &\leq \rho_{1, k+1}(|A^{(0)}|)(x_{k+1} + x_k)/2 + \rho_{k, n}(|A^{(0)}|)(x_n + x_{n-1})/2 \\ &\leq [\rho_{1, k+1}(|A^{(0)}|) + \rho_{k, n}(|A^{(0)}|)](\lambda_n + \lambda_{n-1})/2 \quad (9) \end{aligned}$$

由定理 1 条件(1)及式(9)可推知对 $k = 1, 2, \dots, n-1$ 成立

$$f_k(x) \leq f_{k+1}(x) \quad (10)$$

其中 $f_k(x)$ 是 $f(x)$ 的第 k 个分量.

因为 $A(x)$ 的对角元素为 x_1, x_2, \dots, x_n , 特征值为 $\lambda_1(x), \lambda_2(x), \dots, \lambda_n(x)$, 故据 Schur 优超定理 $x > \lambda(x)$, 注意 $\lambda, x, \lambda(x)$ 及 $f(x)$ 的分量均以升序排列, 于是可推知

$$f(x) = \lambda + x - \lambda(x) > \lambda \quad (11)$$

由(10)及(11)断定 $f(x) \in D(\lambda)$ ($x \in D(\lambda)$), 据 Brouwer 不动点原理, f 在 $D(\lambda)$ 中必有不动点 $c = (c_1, c_2, \dots, c_n)$ 使 $f(c) = c$, 即 $\lambda(c) = \lambda$. 亦即若令 $C = \text{diag}(c_1, c_2, \dots, c_n)$, 则矩阵 CA 具有特征值 $\lambda_1, \lambda_2, \dots, \lambda_n$, C 就是问题(MH)的一个解. 定理 1 证毕.

借助 Gerschgorin 圆盘定理可由定理 1 证得定理 2.

定理 3 的证明 对 $x \in D(\lambda)$ 及 $X = \text{diag}(x_1, x_2, \dots, x_n)$ 由(7)及(8)可得:

$$\begin{aligned} & \lambda_{\max}((X^{1/2}A^{(0)}X^{1/2})[1, 2, \dots, k+1]) \\ & \leq m_{1,k+1}(A)[kx_{k+1} + x_k + \dots + x_1]/2 \\ & \leq m_{1,k+1}(A)[k\lambda_n + \lambda_{n-1} + \dots + \lambda_{n-k}]/2 \\ & \lambda_{\min}((X^{1/2}A^{(0)}X^{1/2})[k, \dots, n]) \\ & \geq -m_{k,n}(A)[(n-k)x_n + x_{n-1} + \dots + x_k]/2 \\ & \geq -m_{k,n}(A)[(n-k)\lambda_n + \lambda_{n-1} + \dots + \lambda_k]/2 \end{aligned}$$

上述推导中利用了 $x > \lambda$, 综合上述两式得

$$\begin{aligned} & \lambda_{\max}((X^{1/2}A^{(0)}X^{1/2})[1, 2, \dots, k+1]) - \lambda_{\min}((X^{1/2}A^{(0)}X^{1/2})[k, \dots, n]) \\ & \leq \{m_{1,k+1}(A)[k\lambda_n + \lambda_{n-1} + \dots + \lambda_{n-k}] + m_{k,n}(A)[(n-k)\lambda_n + \lambda_{n-1} + \dots + \lambda_k]\}/2 \quad (12) \end{aligned}$$

用定理 3 条件(3), 式(5)及(12)可得(10). 余下的论证同定理 1. 证毕.

定理 4 的证明 对 $x \in D(\lambda)$ 及 $X = \text{diag}(x_1, x_2, \dots, x_n)$ 由(7)及(8)可得

$$\begin{aligned} & \lambda_{\max}((X^{1/2}A^{(0)}X^{1/2})[1, 2, \dots, k+1]) - \lambda_{\min}((X^{1/2}A^{(0)}X^{1/2})[k, \dots, n]) \\ & \leq \{(kx_{k+1} + x_k + \dots + x_1) + [(n-k)x_n + x_{n-1} + \dots + x_k]\}m_k(A)/2 \end{aligned}$$

花括号中的值可整理为

$$(x_1 + x_2 + \dots + x_n) + (x_k + x_{k+1}) + (k-1)x_{k+1} + (n-k-1)x_n.$$

由 $x > \lambda$ 知

$$x_1 + x_2 + \dots + x_n \leq \lambda_1 + \lambda_2 + \dots + \lambda_n, \quad x_k + x_{k+1} \leq \lambda_{n-1} + \lambda_n, \quad x_{k+1}, x_n \leq \lambda_n,$$

于是

$$\begin{aligned} & \lambda_{\max}((X^{1/2}A^{(0)}X^{1/2})[1, 2, \dots, k+1]) - \lambda_{\min}((X^{1/2}A^{(0)}X^{1/2})[k, \dots, n]) \\ & \leq \{n\lambda_n + 2\lambda_{n-1} + \lambda_{n-2} + \dots + \lambda_1\}m_k(A)/2 \quad (13) \end{aligned}$$

由定理 4 的条件(4), (5)及(13)可得(10). 余下的论证同定理 1. 证毕.

3 数值例子

例 1 设 $\lambda = (1.1, 1.7, 2.3)$, $A = I + 0.1B$

其中

$$B = \begin{bmatrix} 0 & 1 & -1 \\ 1 & 0 & 1 \\ -1 & 1 & 0 \end{bmatrix}$$

考虑问题(MH)的可解性

用定理 2. 由 $r_{1,2}(A) = 0.1$, $r_{1,3}(A) = 0.2$, $r_{2,3}(A) = 0.1$ 可算得

$$(\lambda_3 + \lambda_2)(r_{1,2}(A) + r_{1,3}(A))/2 = 0.6 = \lambda_2 - \lambda_1$$

$$(\lambda_3 + \lambda_2)(r_{1,3}(A) + r_{2,3}(A))/2 = 0.6 = \lambda_3 - \lambda_2$$

据定理 2, 本例问题(MH)可解. 事实上,

$C = \text{diag}(1.1736548, 1.7018655, 2.2244797)$ 是一个数值解.

用定理 3. 因为 $m_{1,2}(A) = m_{1,3}(A) = m_{2,3}(A) = 0.1$, 可算得

$$[(\lambda_3 + \lambda_2)m_{1,2}(A) + (2\lambda_3 + \lambda_2 + \lambda_1)m_{1,3}(A)]/2 = 0.57 < \lambda_2 - \lambda_1$$

$$[(2\lambda_3 + \lambda_2 + \lambda_1)m_{1,3}(A) + (\lambda_3 + \lambda_2)m_{2,3}(A)]/2 = 0.57 < \lambda_3 - \lambda_2$$

由定理 3 可判断本例问题(MH)可解.

用定理 4, 由 $m_1(A) = m_2(A) = 0.1$ 可算得

$$(3\lambda_3 + 2\lambda_2 + \lambda_1)m_1(A)/2 = 0.57 < \lambda_2 - \lambda_1$$

$$(3\lambda_3 + 2\lambda_2 + \lambda_1)m_2(A)/2 = 0.57 < \lambda_3 - \lambda_2$$

故用定理 4 也可判断本例问题(MH)可解.

用文[2~5]的方法不能判断本例问题(MH)的可解性. 可见本文定理 1~4 独立于文[2~5]的结果.

类似地考察例 2: $\lambda = (0, 2.5, 5)$, $A = I + 0.25B$ 其中 B 如例 1. 可知定理 3, 4 独立于定理 1, 2.

考察例 3: $\lambda = (1, 2, 3, 4)$, $A = I + 0.08B$, 其中 $B = [0, e_3 + e_4, e_2 + e_4, e_2 + e_3]$ (这里 e_i 表示 4 阶单位矩阵的第 i 列). 可知定理 4 独立于定理 1~3.

考察例 4: $\lambda = (1, 2, 3)$, $A = I + 0.4B$, 其中 $B = [e_3, 0, e_1]$ (这里 e_i 表示三阶单位矩阵的第 i 列). 可知定理 1, 2 独立于定理 3, 4.

不难看出, 本文的结果是新颖的, 定理 1, 3, 4 彼此独立, 定理 2 则避免了定理 1 谱半径计算之烦, 是定理 1 的简便实用形式.

注 3 按本文的思路, 还可以将定理 1~3 的证明过程灵活结合, 扩展出更多的结果. 例如, 可用(2)与(3)结合, 从而证得

$$\lambda_{k+1} - \lambda_k \geq \{(\lambda_n + \lambda_{n-1})r_{1,k+1}(A) + [(n-k)\lambda_n + \lambda_{n-1} + \dots + \lambda_k]m_{k,n}(A)\}/2$$

($k = 1, 2, \dots, n-1$) 是(MH)可解的充分条件, 在此不一一赘叙.

参 考 文 献

- 1 黎罗罗. 中山大学学报(自然科学版), 1992(2): 115~117
- 2 Biegler-Konig FW. Linear Algebra Appl. 1981, 40: 89~100
- 3 Hadeler K P. Linear Algebra Appl, 1969, 2: 65~86
- 4 Hadler K P. Arch Rat Mech and Anal, 1971, 42: 317~322
- 5 Li Luoluo. Linear Algebra Appl, 1991, 148: 225~236
- 6 Horn RA, Johnson CR. Matrix Analysis, Cambridge: Cambridge University Press, 1985. 189, 181, 491, 182, 183

Sufficient Conditions for the Solvability of Multiplicative Inverse Eigenvalue Problem

*Li Luoluo**

Abstract Let n nonnegative real numbers $\lambda_1, \lambda_2, \dots, \lambda_n$ and A , a positive semidefinite Hermitian matrix A of order n , be given. We present sufficient conditions for the solvability of multiplicative inverse eigenvalue problem (MH), for short; find a nonnegative diagonal matrix C such that the matrix CA possesses eigenvalues $\lambda_1, \lambda_2, \dots, \lambda_n$. We pay more attention to the effects of smaller components of $\{\lambda_i\}$. In the case $n=2$, the sufficient conditions are also necessary for (MH) to have solutions.

Keywords Hermitian matrix, eigenvalue, inverse problem, fixed-point theorem, majorization, nonnegative matrix

* Department of Computer Science, Zhongshan University, Guangzhou 510275