

椭球形弹性薄壳与内部可压缩流体的耦合振动

赵 健

(应用力学与工程系)

摘 要 联合采用可压缩流体的边界元法与轴对称弹性薄壳的改进多节传递矩阵法, 求解内部充液的椭球壳的耦合振动。数值计算结果表明, 内部充液对壳体振动的耦合作用较强, 壳体厚度与扁平度不同的椭球薄壳, 耦合作用强度有较大差别。

关键词 弹性薄壳, 可压缩流体, 耦合振动

1 引言

在结构与流体的耦合振动的数值求解中, 须分别建立流体运动与结构振动的计算模型, 然后联立求解。其主要方法有: 流场有限元与结构有限元解法⁽¹⁾; 流场边界元——结构有限元法⁽²⁾。就轴对称型薄壳而言, 文[3]的工作表明, 采用改进的多节传递矩阵法计算振动, 具有速度快、精度高、占用内存空间少等优点。在流场数值计算方面, 近年来边界元法最受重视。它较之有限元法将布点空间降了一维, 大大地减少了计算量与计算存储空间。

Chen⁽²⁾在内部充液壳内流场的边界元解法中, 仍用与外问题相同的复数形式的Green函数($\frac{1}{r} \exp(-jkr)$)。本文认为在不考虑流体粘性的内问题中, 由于不存在能量辐射, 其Green函数可以只取实数形式。这样可使内部流场边界元法的计算量减小一半以上。

2 基本公式

椭球壳内部可压缩流体的运动, 符合声波波动方程。对谐和振动情形, 其积分方程式如下⁽⁴⁾:

$$H(\alpha)p(\alpha) = \int_S p(\beta) \frac{\partial}{\partial n_\beta} [G(\alpha, \beta)] ds(\beta) + jk\rho c \int_S V(\beta) G(\alpha, \beta) ds(\beta) \quad (1)$$

$$\text{其中} \quad H(\alpha) = 4\pi + \int_S \frac{\partial}{\partial n_\beta} \left(\frac{1}{\gamma(\alpha, \beta)} \right) ds(\beta) \quad (2)$$

k 为波数; ρ 为介质密度; c 为声速; S 为边界面; n_β 为边界面法向; β 为轴对称体表面 S 上的任意点; α 为空间任意点; $\gamma(\alpha, \beta)$ 是 α 与 β 两点间的距离; $G(\alpha, \beta)$ 为Green函数,

本文1990年9月30日收到

对椭球壳置于流体介质中的所谓外问题, $G(\alpha, \beta) = \exp(-jk\gamma(\alpha, \beta))/\gamma(\alpha, \beta)$; 对于内部充液情形, 即所谓内问题, 文献[2]中介绍使用与外问题一样的复数型 Green 函数。可这样会产生一个矛盾: 当给定壳体表面振速分布后, 由于复矩阵运算存在的数值误差, 会导出壳体向内部区域辐射声能量的结果, 这是不正确的。因为在内部区域中虽然建立了一个声场, 但由于在模型中考虑的是无粘流体, 不会吸收能量, 故壳体向内部流体的总辐射声能应为零。因此, 如果取实函数形式, $G(\alpha, \beta) = \cos(k\gamma)/\gamma$, 则不会出现错误结果。而且简化后可减少一半的内存空间, 使计算速度加快一倍以上。

文献[5]中介绍了采用边界元法将(1)式所示积分方程离散化求解的步骤, 提出了以极坐标变换法化解奇异积分、提高计算精度。对于内问题的求解, 只需调换 Green 函数, 将相应的复数运算变成实数运算。

沿壳体母线方向等距离布置 N_{tot} 个点, 得到内部可压缩流体作用在壳面上的阻抗矩阵为 S_{ound} , 有:

$$\mathbf{P} = \mathbf{S}_{\text{ound}} \cdot \mathbf{V} \quad (3)$$

\mathbf{P} , \mathbf{V} 为 N_{tot} 个元素的列向量; \mathbf{S}_{ound} 为 $N_{tot} \times N_{tot}$ 个元素的方阵。

对于半径为 R 的球壳, 若表面上振速均匀(以指向流体区域为正), 则得内部充液情形下壳面处附加质量与内部总液体质量之比的理论解为:

$$\frac{P \cdot 4\pi R^2 / a}{4/3\pi R^3 \rho} = \frac{3\sin kR}{kR \cos kR - \sin kR} \quad (4)$$

其中, $a = j\omega \mathbf{V}$ 为壳面振动加速度。

文献[3]中介绍了采用改进的多节传递矩阵法求解椭球壳的自由振动。本文进一步考虑强迫振动的解法。

如果作用于壳体表面的外载荷只有法向力, 它包括已知的外力(考虑简谐力, 幅值为 $p_e(s)$, s 为母线长度坐标), 及未知的流体压力($p_a(s)$)。可得壳体在外力作用下的强迫振动方程为:

$$\mathbf{A}(s) \frac{d\mathbf{Y}(s)}{ds} = \mathbf{B}(s) \mathbf{Y}(s) + p_a(s) \mathbf{D}(s) + p_e(s) \mathbf{D}(s) \quad (5)$$

式中, $\mathbf{Y}(s)$ 是由 6 个壳体参数组成的列向量; $\mathbf{D}(s)$ 是 6 个元素的列向量; $\mathbf{A}(s)$, $\mathbf{B}(s)$ 是 6×6 个元素的系数矩阵。具体定义参见文献[5]。

改进的多节传递矩阵法对轴对称型薄壳振动的求解较为合适, 能直接处理壳体封闭端的奇异性问题, 且应用简便。

将壳体沿母线方向分成若干节, 应用(5)式求出各节传递矩阵后, 由分块矩阵的高斯消去法, 将两个封闭端处的边界条件转换到各个分段点上; 可对每一段点解出法向振速用已知外力及未知声压力所表达的方程式; 然后进一步用传递矩阵法确定每一节点上的类似表达式; 最后对于法向振速可以得到一个含有结构导纳矩阵的式子:

$$\mathbf{V} = \mathbf{P}_{\text{vib}} \cdot \mathbf{P} + \mathbf{E}_{xt} \quad (6)$$

\mathbf{V} , \mathbf{P} , \mathbf{E}_{xt} 为 N_{tot} 个元素的列向量, 分别代表: 法向振速, 流体压力, 已知外力作用下真空中的法向振速; \mathbf{P}_{vib} 为 $N_{tot} \times N_{tot}$ 个元素的导纳矩阵。

根据(3)式与(6)式, 联立求解即可确定耦合振动;

$$(E - P_{vib} \cdot S_{ound}) V = E_x t \quad (7)$$

上式中E为单位矩阵。

$P_{vib} \cdot S_{ound}$ 矩阵中元素量级的大小反映了耦合作用的强弱，取决于流体性质、结构几何形状及壳体材料性质的综合影响。

3 数值计算

运用上节的数学模型，在IBM-PC/AT机上编制了FORTRAN语言程序，对椭球壳垂直轴与水平轴之比 (b/a) 为 2, 1, 0.5 三种情况下，计算了壳体耦合振动。计算中，沿壳面母线方向取31个节点。流体参数为： $\rho_L = 1000 \text{ kg/m}^3$, $c = 1500 \text{ m/s}$ ；壳体材料参数为： $\rho_s = 7800 \text{ kg/m}^3$, $E = 2.11 \times 10^{11} \text{ N/m}^2$ ，厚度 h /水平半轴长 $a = 0.03$ ，泊松比 $\nu = 0.3$ 。

对于内部充液的脉动球，(4)式中给出了附加质量系数的理论解。本文方法的计算结果与理论解的比较见表1。从中看到两者是基本吻合的。但是，当频率较低或较高时，计算精度均有所下降。计算精度随频率增加而降低，这一点较容易理解，因为Green函数的振荡性加强，壳体振动参数的空间变化率加大了。而在较低频率时，为什么也会出现这种现象，其根本原因是，对于内部充满液体的脉动球，在 $kR \rightarrow 0$ 时(极低频)，存在一个奇点，其附加质量系数为无穷大。因而在接近于奇点的过程中，不可避免地会出现计算精度下降的趋势。

表1 脉动球内部充液情形下的附加质量系数

Tab.1 The Added Mass Coefficients of Pulsating Sphere Filled with Fluid

kR	理论值	计算值	相对误差 (%)
0.5	-35.4	-38.91	9.91
1.0	-8.37	-8.49	1.43
2.0	-1.57	-1.67	6.36

图1—3是3种情形下 ($b/a = 2, 1, 0.5$)，壳体在其左端部一段弧长占母线总

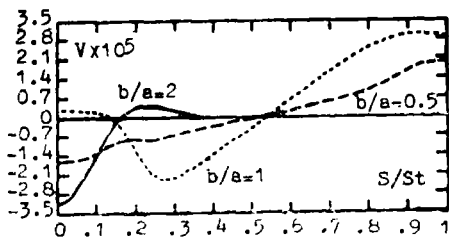


图1 真空中的振动速度 ($ka = 1$, 对 $b/a = 1, 0.5$ 图中两条曲线值放大了100倍)
Fig.1 Velocity in Vacuum ($ka = 1$, the Amplify Factor for $b/a = 1, 0.5$ is 100)

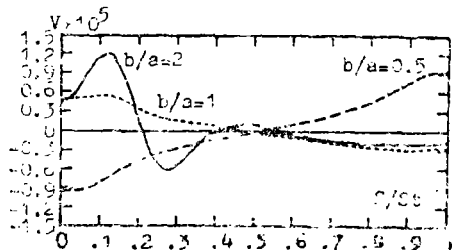


图2 充液后的耦合振动速度 ($ka = 1$, 对 $b/a = 2, 1$ 两条曲线放大了10倍)
Fig.2 Velocity with Liquid ($ka = 1$, the Amplify factor for $b/a = 2, 1$ is 10)

长度 $1/5$ 的壳面上,受 1N/m^2 的均匀外力作用下真空中的表面振速分布、内部充液后耦合振动表面振速及声压分布,由于内部区域不存在能量辐射,故振速与声压之间相位差处处都是 $\frac{\pi}{2}$ 。

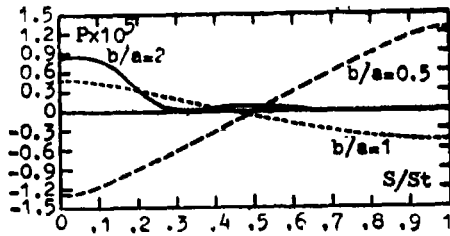


图3 充液后的壳面压力($ka = 1$,对 $b/a = 2, 1$ 两条曲线放大了10倍)

Fig. 3 Pressure with Liquid ($ka = 1$, the Amplify Factor for $b/a = 2, 1$ is 10)

在图1中,给出了 $ka = 1$, $b/a = 2, 1, 0.5$ 情形下真空中的振速分布,横坐标 S/St , S 为母线长度坐标, St 为母线总长。从中看到 $b/a = 2$ 的情形振速比另外两种情况大100倍;但是在图2中,充液后 $b/a = 2$ 的情形其振速反倒是 $b/a = 0.5$ 情形下的 $\frac{1}{10}$ 。可见,充液后的耦合振动与真空中的振动有较大差异,而且几何形状的不同也导致了耦合作用强弱的差别。

比较图2与图3,可看到三条对应的振速与压力曲线形状相似。在一般情况下,振动幅度较大的壳面点附近流体压力也大一些。但是由于耦合作用的复杂性,振动能量可以沿壳面或通过流体传递。最大压力点都出现在壳端附近,这是能量集结的区域。

4 结 论

采用可压缩流体边界元法与轴对称薄壳振动的改进多节传递矩阵法,计算内部充液的弹性薄壳耦合振动,具有精度高、速度快、需内存空间少等优点。用本文方法所得球壳内部充液情形的附加质量系数值与理论解吻合甚好;流固耦合振动的强弱与流场中阻抗矩阵和结构导纳矩阵元素量级有关。

参 考 文 献

- 1 周科健. 装液回转壳体的固有频率与振型的计算. 国防科技大学学报, 1982, 1: 29~34
- 2 Chen L H. New Developments in Boundary Element Method, Chapter 9. Acoustic Emissions from Submerged Structures. Applied Science Publishers LTD, 1982

- 3 赵键, 汪鸿振, 朱物华. 轴对称弹性薄壳自振频率与模态的计算. 中山大学学报(自然科学版), 1990, 29(4): 12~16
- 4 Seybert A F, Soenarko B, Rizzo FJ, Shippy D J. An Special Integral Equation Formulation for Acoustic Radiation and Scattering for Axisymmetric Bodies and Boundary Conditions. JASA, 1986, 80(4):1241~1247
- 5 赵键, 汪鸿振, 朱物华. 改进计算对称壳体声辐射的边界积分方程方法. 上海交通大学学报, 1989, 23(4): 61~69

The Coupled Vibration of Spheroidal Elastic Shell Filled with Compressible Fluid

Zhao Jian*

Abstract The boundary element method(BEM) for compressible fluid and the improved multi-segmental transfer matrix method of thin, elastic axisymmetric shells is employed to solve the coupled vibration of shell filled with fluid. Numerical results show that the coupling effects on shell vibration are rather strong, and differ significantly for different geometry or structure.

Keywords spheroidal shell, compressible fluid, the coupled vibration

* Department of Applied Mechanics and Engineering