

非线性振动的谐波最优化方法

詹 胜

(中山大学应用力学与工程系)

摘 要 提出用谐波最优化的方法(简称HO方法)求解非线性振动问题,应用于水下物体振动的计算,给出了计算和实验结果,并应用于杜芬方程的求解。该法具有推导简单、计算速度快等优点,当谐波项取得足够多,控制收敛常数足够小时,所求解趋于精确解。

关键词 谐波,最优化。

1 基本原理

设非线性振动方程为

$$m\ddot{x} + f_1(\dot{x}, x) = f_2(t) \quad (1)$$

式中 $f_1(\dot{x}, x)$ 含有非线性项。

假设外力 $f_2(t)$ 富氏级数展开式的基频为 Ω , 则 $T = 2\pi/\Omega$ 。令 $\omega = \Omega/S$, 则 $\tau = 2\pi/\omega = ST$, 这里的 S 为正整数。设解为^[1,2]

$$x = a_0 + \sum_{i=1}^n (a_i \cos i\omega t + b_i \sin i\omega t) \quad (2)$$

$$V = [a_0, a_1, b_1, \dots, a_n, b_n]^T$$

代入方程(1), 并将非线性项展成富氏级数, 得

$$\begin{aligned} (a_{10} - a_{20}) + \sum_{i=1}^n [(a_{1i} - a_i i^2 \omega^2 m - a_{2i}) \cos i\omega t \\ + (b_{1i} - b_i i^2 \omega^2 m - b_{2i}) \sin i\omega t] = 0 \end{aligned} \quad (3)$$

$$\text{其中, } a_{10} = \frac{1}{\tau} \int_0^\tau f_1(\dot{x}, x) dt; \quad a_{20} = \frac{1}{\tau} \int_0^\tau f_2(t) dt;$$

$$a_{1i} = \frac{2}{\tau} \int_0^\tau f_1(\dot{x}, x) \cos i\omega t dt; \quad b_{1i} = \frac{2}{\tau} \int_0^\tau f_1(\dot{x}, x) \sin i\omega t dt;$$

$$a_{2i} = \frac{2}{\tau} \int_0^\tau f_2(t) \cos i\omega t dt; \quad b_{2i} = \frac{2}{\tau} \int_0^\tau f_2(t) \sin i\omega t dt; \quad (i = 1, 2, 3, \dots, n).$$

本文1991年4月22日收到
中山大学科研基金资助项目

(2) 所表示的 x 值是方程 (1) 解的充分必要条件为

$$\begin{cases} a_{10} - a_{20} = 0 \\ a_{1i} - a_i i^2 \omega^2 m - a_{2i} = 0 \\ b_{1i} - b_i i^2 \omega^2 m - b_{2i} = 0 \end{cases} \quad (4)$$

这是一个以谐波分量的幅值, 也就是向量 V 为未知数的非线性方程组。对谐波分量进行最优化处理便可得到满足方程 (4) 的对应某一 ω 的解 V 。

令 $y_0 = a_{10} - a_{20}$; $y_i = a_{1i} - a_i i^2 \omega^2 m - a_{2i}$; $z_i = b_{1i} - b_i i^2 \omega^2 m - b_{2i}$
作一函数

$$g(V) = y_0^2(V) + \sum_{i=1}^n [y_i^2(V) + z_i^2(V)] \quad (5)$$

显然, 如果 V 是方程 (4) 的解, 则有

$$g(V) = 0 \quad (6)$$

是函数 $g(V)$ 的最小值。因此, 求函数 $g(V)$ 的最小值便可求出方程 (1) 对应于某一给定 ω 的解。

$g(V)$ 取得极小值的必要条件为

$$\nabla g(V) = 0 \quad (7)$$

根据实际问题本身的性质, 只要方程 (1) 的解是存在的, 则函数 $g(V)$ 的最小值必然存在, 且等于 0。

令 $G(V) = [y_0(V), y_1(V), z_1(V), \dots, y_n(V), z_n(V)]^T$

则 $g(V) = G(V)^T \cdot G(V)$

$$\begin{aligned} \nabla g(V) &= \left[\frac{\partial g(V)}{\partial a_0}, \frac{\partial g(V)}{\partial a_1}, \frac{\partial g(V)}{\partial b_1}, \dots, \frac{\partial g(V)}{\partial a_n}, \frac{\partial g(V)}{\partial b_n} \right]^T \\ &= 2A^T G(V) \end{aligned} \quad (8)$$

(8) 式中 A 为 $G(V)$ 各分量的微分系数矩阵。

假设 V_0 为解的初始近似, 则在 V_0 附近, 即 $V = V_0 + \Delta V$ 处, 有:

$$G(V) = G(V_0) + A_0 \cdot \Delta V \quad (9)$$

显然, 当 $G(V) = 0$ 的时候, V 就是所要求的解。此时

$$g(V) = \|G(V)\|^2 = 0$$

在这里, 由于未知数的个数和方程的个数相等, 不属于超定方程组, 所以令 $G(V) = 0$, 求解

$$G(V_0) + A_0 \Delta V = 0 \quad (10)$$

可得 ΔV 值, 而 $V = V_0 + \Delta V$ 就是首次近似解。如 V 尚未满足要求, 则以当前的 V 值作 V_0 值, 重复前面的计算。目的是使 $G(V)$ 向零逼近。

如果方程的个数大于未知数的个数, 则 (10) 是超定方程组, 可求它的最小二乘解, 根据方程 (7)、(8)、(9) 可得

$$A_0^T A_0 \Delta V + A_0^T G(V_0) = 0 \quad (11)$$

解 (11), 可得 ΔV , 这样得到的点 $V = V_0 + \Delta V$ 是 $g(V)$ 的驻点, 不一定是极小值点, 但由于

在解法上总是使 $g(V)$ 的值逐次减少,直至取得极小值,以及 $g(V)$ 具有为实际问题所决定的凸性,所以在一般情况下,都可获得满意结果。

为了更有效找到极小值点,可采取以下两种方法^[3]:

(i) 解方程(11)求得 ΔV 后,沿一维方向搜索最优步长因子 t ,使 $g(V_0+t\Delta V)$ 等于极小。然后以 $V_0+t\Delta V$ 为新的 V_0 值,重复以上计算,直至满足要求为止。

(ii) 增加阻尼因子以防止坏条件的法方程。

$$u^2 = \frac{1}{M} \cdot \frac{1}{N} \sum_{i=1}^M \sum_{j=1}^N a_{ij}^2 \quad (a_{ij} \text{ 为矩阵 } A \text{ 之元素})$$

求解

$$(A_0^T A_0 + u^2 I) \Delta V = -A_0^T G(V_0) \quad (12)$$

得 ΔV 后,检查 $g(V_0 + \Delta V)$ 是否小于 $g(V_0)$ 而采取相应的修正 u^2 值的方法,并作相应的计算,直至 $g(V)$ 值满足要求为止。

2 应用

作为实际应用,我们以水下物体在波浪作用下的非线性振动为题进行计算,这是个流固耦合非线性阻尼问题,振动方程为^[4]:

$$\left(m + C_A \frac{\rho \pi D^2 L}{4}\right) \ddot{x} + C_D' \frac{\rho DL}{2} |\dot{x}| \dot{x} + K_s x = -C_I \frac{\rho \pi D^2 L}{4} \cdot \frac{kgH}{2} \cdot \frac{chk(d+z)}{chkd} \cdot \sin \omega t + C_D \frac{\rho DL}{2} \left[\frac{kgH}{2\omega} \cdot \frac{chk(d+z)}{chkd} \right]^2 |\cos \omega t| \cos \omega t \quad (13)$$

式中, m 为圆柱体自身质量; C_A 为附加水质量系数(在这里,取 $C_A=1$); ρ 为水密度; D, L 为圆柱体直径与长度; C_D' 为物体振动时的阻力系数^[6]; C_D, C_I 为计算波浪力时的阻力系数,惯性力系数; K_s 为弹簧常数; k, H, ω 分别为波数,波高,波浪角频率; g 为重力加速度; d 为水深; z 为圆柱体在水中的位置。

计算的结果见图1,实验的结果与相应的计算结果比较见图2(实验值选自《海洋工程实验室模拟研究报告》,香港理工学院刘世龄、吴朝安,中山大学詹胜,1989年12月)。

3 杜芬方程的计算结果

杜芬方程为

$$m\ddot{x} + c\dot{x} + kx + \alpha x^3 = F \sin \omega t \quad (14)$$

当 $m=1\text{kg}$ 、 $c=0.3\text{N}\cdot\text{s}/\text{m}$ 、 $k=50\text{N}/\text{m}$ 、 $\alpha=500\text{N}/\text{m}^3$ 时,计算结果 x_1 和 x_2 的频响曲线分别如图3和图4所示。

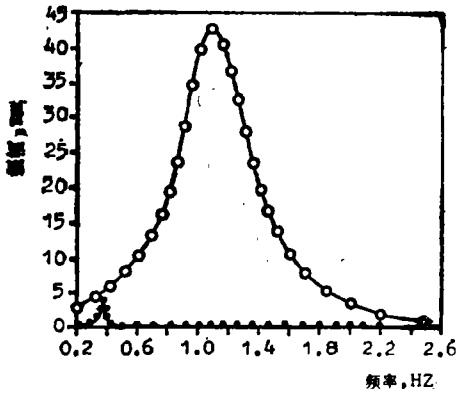


图1 基波、三次谐波振幅与频率的关系曲线
Fig.1 Amplitudes of fundamental and triple-frequency harmonic versus frequency response characteristic

—为IHB方法的结果, \circ, \cdot 为HO方法的 x_1 和 x_3 的结果($H=0.05m, d=0.76m, z=-0.15m, C_D=1.2, C_D'=2.0, C_I=2, M=m+m_{add}=14.52kg, K_s=714N/m, D=0.08m, L=1.45m$)

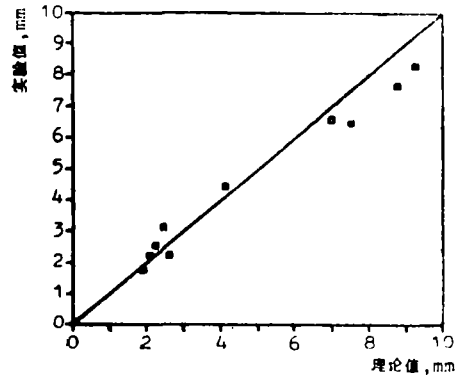


图2 x_1 理论值与实验值比较
Fig.2 Theoretical results versus experimental results

($H=0.0115\sim 0.0533m, f=0.685\sim 1.732Hz, D=0.14m, L=1.45m, d=0.81m, z=-0.25\sim -0.35m, M=41.32kg, K_s=4068N/m, C_I=2.3, C_D=2.0, C_D'=2.0$)

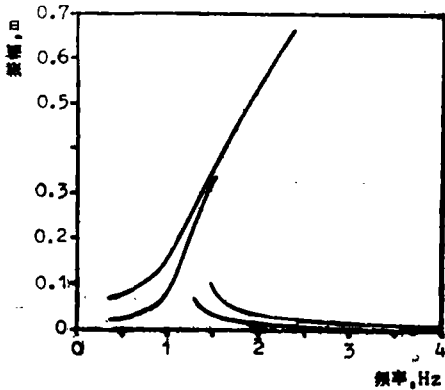


图3 基波振幅 x_1 的频响曲线
(曲线: 上两条 $F=3N$, 下两条 $F=1N$)
Fig.3 Amplitude x_1 of fundamental versus frequency response characteristic

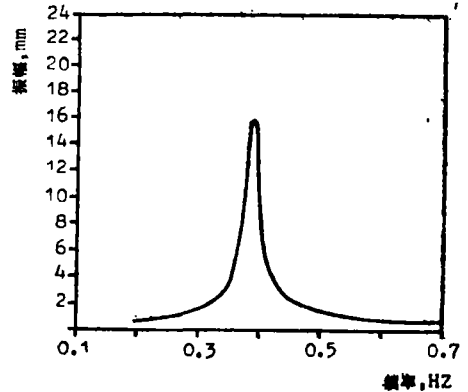


图4 三阶谐波共振曲线
($F=3N$)
Fig.4 Triple-frequency harmonic resonance

亚谐波分量 $x_{\frac{1}{3}}$ 在以上的条件下为0, 但当 $c=0, F=3N$, 收敛常数取0.001N时, 在 $f=3.375Hz$ 处, 求得结果如下:

$$x_1 = 0.0075m, \quad x_{\frac{1}{3}} = 0.0106m$$

显然, 此时属亚谐波共振的情形。

应用本方法所求出的解通常都是稳定解。在振幅不稳定区, 除非各谐波分量的初值与频率、外力正好满足一定精度的解(这样的概率是极小的), 否则, 谐波优化的结果都是自动向上或向下直至得出稳定解为止。

4 结 论

(1)从图中可知,HO法算出的结果与IHB法算出的相同,与实验的结果也基本上相一致。

(2)从计算过程可知,HO法收敛的速度相当快,绝大多数点只需迭代一、二次就可以使方程(13)、或者(14)两边力的不平衡量小于 $10^{-3}N$,在低频区,这力所引起的位移仅为 $10^{-6}m$ 左右。

(3)振动中的亚谐波、基波、高阶谐波各分量可在同一次计算中一起求出,另外,在编程过算中,可进行频率扫描,也可以单个点求解。

(4)计算精度也是很好的,见表1。

表1 杜芬方程计算结果

($M = 1kg, c = 0, k = 50N/m, \alpha = 500N/m^3, F = 3N, f = 3.375Hz$)

Tab.1 The calculated results of Duffing equation

控制收敛常数(e)	$x_1(mm)$	优化迭代次数
0.01	7.51	1
0.001	7.507	3
0.0001	7.5062	5
0.00001	7.5063	6

(5)谐波项次可取1, 2, 3, ...或1, 3, 5, ...或1, 3, 9, ...等。

参 考 文 献

- 1 唐千照, 黄文虎主编. 振动与冲击手册, 第一卷. 北京: 国防工业出版社, 1988
- 2 Schmidt G, Tondl A. Non-Linear Vibrations. Cambridge University Press, 1986. 35~38
- 3 南京大学数学系. 最优化方法. 北京: 科学出版社, 1984. 111~137
- 4 Chakrabari S K. Hydrodynamics of Offshore Structures. Computational Mechanics Publications, Southampton, 1987. 178~195
- 5 冯登泰. 应用非线性振动力学. 北京: 中国铁道出版社, 1982. 82~88

Harmonic Optimization for Nonlinear Vibration

Zhan Sheng*

Abstract Harmonic optimization (HO) for nonlinear vibration is presented and is applied to submerged cylinder vibration under the action of wave. The results of calculation and experiment are also given. More than that, it is employed to Duffing equation. HO method has some advantages such as simply derivation of equation and obtaining results quickly. The accurate solutions will be attained if harmonic terms are enough and convergence constant is small enough.

Keyword harmonic, optimization

* Department of Applied Mechanics and Engineering, Zhongshan University