

一阶闭环TAR模型的应用及其 系数估计的渐近性质

邓集贤 范文宁 宋心远**

(数学系)

摘要 应用一维一阶闭环TAR模型拟合中国的消费与积累关系。并对二维一阶自激TAR模型,研究了它的系数估计,获得了估计的强相容性和渐近正态性的一个充分条件。

关键词 消费与积累,强相容性,渐近正态性

1 我国消费与积累关系的非线性模型

在研究宏观经济关系中,消费与积累的关系是经济学家们关心的中心问题之一^[1,2]。文[2]、[3]在研究中国消费与积累问题时,提出了如下的乘数——加速数模型:

$$(I) \begin{cases} Y_t = C_t + I_t \\ C_t = \nu_0 + \nu_1 Y_{t-1} + \nu_2 C_{t-1} \\ I_t = \beta_0 + \beta_1 (Y_t - Y_{t-1}) + \beta_2 I_{t-1} \end{cases} \quad t \in N^+ = \{0, 1, \dots\}.$$

其中 Y_t , C_t , I_t 分别表示 t 年的国民收入(使用额)、消费和积累数。文中1953年至1982年的有关数据引自于[4]。获得(I)中各未定系数 $\nu_0, \nu_1, \dots, \beta_1, \beta_2$ 的估计值,从而拟合了一个消费与积累关系的线性模型。近年来,我国经济界的不少学者从中国的实际情况出发,指出积累率(t 年的积累率定义为 I_t/Y_t)的大小影响着经济发展的快慢^[1],因此,如果我们能把积累率这一因素考虑进模型中,那它将会更有效地描述实际现象。为此,首先把(I)作适当的等价变换为:

$$(II) \begin{cases} Y_t = C_t + I_t \\ C_t = a_0 + a_1 C_{t-1} + a_2 I_{t-1} \\ I_t = b_0 + b_1 C_{t-1} + b_2 I_{t-1} \end{cases} \quad t \in N^+.$$

其次,把积累率因素考虑进去,用如下的一维一阶闭环TAR这一非线性的计量经济模型描述我国消费与积累关系:

本文1990年9月10日收到

- 国家自然科学基金资助项目
- 计算中心李观华参加计算工作

$$(III) \begin{cases} Y_t = C_t + I_t \\ C_t = \varphi_0^{(i)} + \varphi_1^{(i)} C_{t-1} + \varphi_2^{(i)} I_{t-1} + \eta_t^{(i)} \\ I_t = \phi_n^{(i)} + \phi_1^{(i)} C_{t-1} + \phi_2^{(i)} I_{t-1} + \zeta_t^{(i)} \end{cases} \quad \text{当} \quad \frac{I_{t-1}}{Y_{t-1}} \in R_i, i=1,2.$$

其中, $R_1 = [0, r)$, $R_2 = [r, 1]$, r 称为积累率门限, $\varphi_k^{(i)}$, $\phi_k^{(i)}$ ($k=0,1,2, i=1,2$) 为待定系数, 其最小二乘方估计为

$$\hat{\phi} = (X'X)^{-1}X'Y,$$

其中,

$$\begin{aligned} \hat{\phi} &= (\varphi_0^{(1)}, \varphi_1^{(1)}, \dots, \varphi_1^{(2)}, \varphi_2^{(2)})'; X = \begin{pmatrix} X_1 & 0 \\ 0 & X_1 \end{pmatrix}; X = (x_{ij})_{n \times 2}; \\ x_{ij} &= (1, C_{i-1}, I_{i-1}) \chi_{\{(I_{i-1}/Y_{i-1}) \in R_j\}}, \quad i=1, \dots, n, j=1,2; \\ Y &= (C_1, \dots, C_n, I_1, \dots, I_n)', C_i, I_j (i=0, 1, \dots, n) \text{为观察值.} \end{aligned}$$

仍用[4]中1953年至1982年消费与积累数据, 按误差平方和最小原理, 获得积累率门限 r 的估计值 $\hat{r} = 0.35$, 拟合模型如下:

$$\begin{cases} C_t = -3.37 + 1.14C_{t-1} - 0.13I_{t-1} + \eta_t^{(1)} \\ I_t = 1.72 + 0.11C_{t-1} + 0.81I_{t-1} + \zeta_t^{(1)} \end{cases} \quad \text{当} \quad \frac{I_{t-1}}{Y_{t-1}} < 0.35;$$

$$\begin{cases} C_t = -35.75 + 0.75C_{t-1} + 0.03I_{t-1} + \eta_t^{(2)} \\ I_t = -86.25 - 1.01C_{t-1} + 3.71I_{t-1} + \zeta_t^{(2)} \end{cases} \quad \text{当} \quad \frac{I_{t-1}}{Y_{t-1}} \geq 0.35.$$

从上列式子看到, 积累率高于或低于0.35, 直接影响次年的国民收入(因为用来计算 C_t, I_t 的模型不同)。应用这个模型, 有利于研究我国的宏观经济的预测与控制。

将历年的消费和积累的实际数据与模型值作比较, 可以看到, 大体相差不太大, 但在一些特殊年份(如1959, 1962, 1968, 1978等年份)拟合误差较大(见表1)。这反映了这些年份, 经济正处于较大变动时期, 是符合我国实际情况的。上述说明, 用非线性模型(III)研究我国消费与积累这一经济现象是较为适合的。

表1 消费和积累的实际值与模型值比较

Tab.1 Comparison between actual values and model values of consumptions and investments

年份t	积累率	消费 C_t	模型值 \hat{C}_t	残差 $C_t - \hat{C}_t$	积累 I_t	模型值 \hat{I}_t	残差 $I_t - \hat{I}_t$
1958	0.339	72.590	73.216	-0.626	37.278	27.783	9.495
1959	0.438	69.747	74.740	-4.993	54.355	39.567	14.788
.....							
1962	0.104	70.842	71.883	-1.041	8.261	21.918	-13.657
.....							

(续上表)

1966	0.306	91.364	86.746	4.618	40.320	35.187	5.133
1967	0.212	95.410	95.785	-0.375	25.805	44.005	-18.200
1968	0.211	92.677	102.260	-9.583	24.858	32.658	-7.800
1969	0.232	102.770	99.260	3.510	31.092	31.604	-0.512
1970	0.329	113.376	109.986	3.390	55.697	37.719	17.978
.....							
1976	0.308	152.284	154.564	-2.280	67.964	78.052	-10.088
1977	0.323	156.532	161.805	-5.273	74.804	72.817	1.987
1978	0.365	167.433	165.781	1.652	96.398	78.811	17.587

2 二维一阶自激 TAR 模型系数估计的强相容性和渐近正态性

$$\text{令 } Z_t = (C_t, I_t)', \quad \varepsilon_t^{(i)} = (\eta_t^{(i)}, \zeta_t^{(i)})'$$

$$A^{(i)} = \begin{pmatrix} \varphi_1^{(i)} & \varphi_2^{(i)} \\ \phi_1^{(i)} & \phi_2^{(i)} \end{pmatrix}, \quad R_i^* = \left\{ Z_{t-1} : \frac{I_{t-1}}{Y_{t-1}} \in R_i \right\}.$$

则(III)的第二, 三两式可用如下二维一阶自激 TAR 模型代替,

$$(IV) \quad Z_t = \phi_0^{(i)} + A^{(i)} Z_{t-1} + \varepsilon_t^{(i)}, \quad \text{当 } Z_{t-1} \in R_i^*, \quad i = 1, 2.$$

其中, $\phi_0^{(i)} = (\varphi_0^{(i)}, \phi_0^{(i)})'$, $(i = 1, 2)$.

对于模型(IV), 我们假定

- i) $\{ \varepsilon_t^{(i)}, \quad i = 1, 2, t \in N^+ \}$ 独立;
- ii) $\varepsilon_t^{(i)}$ 有二元正密度函数 $f_i(\cdot)$;
- iii) $E\varepsilon_t^{(i)} = 0$, $E(\varepsilon_t^{(i)} \varepsilon_t^{(i)'}) = G_i > 0$;
- iv) 对任意固定的 s , $\{ \varepsilon_t^{(i)}, \quad i = 1, 2, t > s \}$ 与 $\{ Z_t, \quad t \leq s \}$ 独立.

在上述条件下, 可以证明 $\{ Z_t \}$ 具有平稳转移概率函数 $P(x, A)$ 的不可约、非周期 Марков链^[5,6].

无特别声明, 下面讨论的 $\{ Z_t \}$ 为满足上述 i), ii), iii), 及 iv) 的模型(IV).

定理 1 (IV) 中的系数若满足下面的条件(D)时, $\{ Z_t \}$ 是遍历的, 即存在唯一概率测度 π , 使得

$$\int P(x, A) \pi(dx) = \pi(A),$$

$$(D) \quad \varphi_1^{(i)} < \frac{1}{2}, \quad \phi_2^{(i)} < \frac{1}{2}, \quad \varphi_2^{(i)} \phi_1^{(i)} < \frac{1}{4}, \quad i = 1, 2.$$

证明 仿[5]或[6]有关定理证明, 由条件(D), 可找到正常数 C_1, C_2 , 使得

$$\varphi_2^{(i)} < \frac{C_2}{2C_1}, \quad \phi_1^{(i)} < \frac{C_1}{2C_2} \quad (1)$$

选取 $g(x) = C_1x_1 + C_2x_2$, 这里 $x = (x_1, x_2)'$, $x_1, x_2 > 0$,

$$\text{令} \quad \delta = \int (C_1z_1 + C_2z_2) f_i(z) dz,$$

$$G = \left\{ x: C_1\left(\frac{1}{2} - \phi_1^{(i)}\right)x_1 + C_2\left(\frac{1}{2} - \varphi_2^{(i)}\right)x_2 - C_1\varphi_0^{(i)}C_2\phi_0^{(i)} < 1 + \delta \right\},$$

显然 G 为一有界区域, 则可得, 当 $x \in G$ 时, 存在正常数 C , 使得

$$\int P(x, dy) g(y) \leq C < \infty \quad (2)$$

并且当 $x \in G$ 时, 有

$$\int P(x, dy) g(y) \leq C_1x_1 + C_2x_2 - 1 = g(x) - 1 \quad (3)$$

由(2), (3)两式, 根据[3]的定理4.2知 $\{Z_t\}$ 是遍历的 ■

设(IV)的门限已知, Z_0, Z_1, \dots, Z_n 为一组非零观察值. 为方便计, 把(IV)写为

$$(V) \quad Z_t = \phi^{(i)} X_{t-1} + \varepsilon_t^{(i)} \quad \text{当 } Z_{t-1} \in R_i^*, \quad i = 1, 2.$$

$$\text{其中,} \quad \phi^{(i)} = \begin{pmatrix} \varphi_0^{(i)} & \varphi_1^{(i)} & \varphi_2^{(i)} \\ \phi_0^{(i)} & \phi_1^{(i)} & \phi_2^{(i)} \end{pmatrix}, \quad X_t = (1, Z_t)'$$

系数 $\phi^{(i)}$ ($i = 1, 2$)的最小二乘方估计为

$$\hat{\phi}^{(i)} = \sum_{t=1}^n Z_t X_{t-1}' \chi_{\{Z_{t-1} \in R_i^*\}} B_i^{-1}.$$

而 G_i 的样本残差平方和估计为

$$\hat{G}_i = \frac{1}{n} \sum_{t=1}^n (Z_t - \hat{\phi}^{(i)} X_{t-1}) (Z_t - \hat{\phi}^{(i)} X_{t-1})' \chi_{\{Z_{t-1} \in R_i^*\}}.$$

$$\text{其中, } B_i = \sum_{t=1}^n X_{t-1} X_{t-1}' \chi_{\{Z_{t-1} \in R_i^*\}}.$$

仿[5]或[6]的证明, 可得

定理 2, 在条件(D)下, 有

$$\lim_{n \rightarrow \infty} \hat{\phi}^{(i)} = \phi^{(i)} \quad \text{a.s.} \quad (i = 1, 2).$$

若还有 $\varepsilon_t^{(i)}$ 的 $2 + \delta$ ($\delta > 0$)阶矩存在, 则有

$$\lim_{n \rightarrow \infty} \hat{G}_i = G_i \quad \text{a.s.} \quad (i = 1, 2).$$

下面讨论系数估计 $\hat{\phi}^{(i)}$ 的渐近正态性. 为此, 先证一些引理:

引理 1 在条件(D)下, 存在满足(V)的强平稳马氏链 $\{Z_t\}$.

证明 只需取 $\{Z_t\}$ 的初始分布为定理 1 中的概率测度 π 即可 ■
 无特别声明，以下讨论的 $\{Z_t\}$ 均指满足上述条件的强平稳马氏链。

引理 2 有
$$\lim_{n \rightarrow \infty} \frac{1}{n} \sum_{i=1}^n X_{t-1} X'_{t-1} \chi_{\{Z_{t-1} \in R_i^*\}} = E(X_{t-1} X'_{t-1} \chi_{\{Z_{t-1} \in R_i^*\}})$$

$$\hat{H}_i > 0 \quad \text{a.s.} \quad (i = 1, 2).$$

证明 由于 $\{Z_t\}$ 是遍历的平稳 Марков 链，且二阶矩存在(仿[5]证明)，根据[9]定理 3.6.5 及[10]的定理 6.2，即得引理 2 的证明 ■

令 Δ_i, T_i 为满足下式的常数矩阵：

$$H_i = \Delta_i \Delta_i' ; \quad G_i = T_i T_i'$$

设 A 为任一 6 阶常数方阵，又令

$$\xi_t^{(i)} = (A^c)' (\Delta_i \otimes T_i^{-1}) (H_i^{-1} \otimes \varepsilon_t^{(i)}) X_{t-1} \chi_{\{Z_{t-1} \in R_i^*\}} \quad (4)$$

其中符号“ \otimes ”表示矩阵的 Kronecker 乘积，“ A^c ”表示矩阵 A 的列化。由前条件可知 $\{\xi_t^{(i)}\}$ 是平稳遍历的。

引理 3 $\{\xi_t^{(i)}, \mathcal{F}_t\}$ 是一鞅差序列，其中 $\mathcal{F}_t = \sigma\{\xi_s^{(i)} : s \leq t\}$ 。

证明 注意 \mathcal{F}_t 的定义及条件 iv)，有

$$\begin{aligned} E(\xi_t^{(i)} / \mathcal{F}_{t-1}) &= (A^c)' (\Delta_i' \otimes T_i^{-1}) E\left[(H_i^{-1} \otimes \varepsilon_t^{(i)}) X_{t-1} \chi_{\{Z_{t-1} \in R_i^*\}} / \mathcal{F}_{t-1} \right] \\ &= (A^c)' (\Delta_i' \otimes T_i^{-1}) X_{t-1} \chi_{\{Z_{t-1} \in R_i^*\}} E\left[(H_i^{-1} \otimes \varepsilon_t^{(i)}) / \mathcal{F}_{t-1} \right] = 0 \quad \blacksquare \end{aligned}$$

令
$$q_n^{(i)} = \frac{1}{\sqrt{n}} \sum_{t=1}^n \xi_t^{(i)} \quad (5)$$

则有

引理 4 (a) $E(\xi_{t_1}^{(i)} \xi_{t_2}^{(i)'}) = 0 \quad (t_1 \neq t_2)$

(b) $E(q_n q_n') = (A^c)' (A^c) > 0, \quad n = 1, 2, \dots$

证明 不妨设 $t_1 < t_2$ ，由假设条件 iii) 及 iv)，有

$$\begin{aligned} & E\left[(H_i^{-1} \otimes \varepsilon_{t_1}^{(i)}) X_{t_1-1} X_{t_2-1} \chi_{\{Z_{t_1-1} \in R_i^*\}} \chi_{\{Z_{t_2-1} \in R_i^*\}} (H_i^{-1} \otimes \varepsilon_{t_2}^{(i)})' \right] \\ &= E\left\{ [H_i^{-1} \otimes (Z_{t_1} - \phi^{(i)} X_{t_1-1})] X_{t_1-1} X_{t_2-1} \chi_{\{Z_{t_1-1} \in R_i^*\}} \chi_{\{Z_{t_2-1} \in R_i^*\}} (H_i^{-1} \otimes \varepsilon_{t_2}^{(i)})' \right\} \\ &= E\left\{ \left[H_i^{-1} \otimes (Z_{t_1} - \phi^{(i)} X_{t_1-1}) \right] X_{t_1-1} X_{t_2-1} \chi_{\{Z_{t_1-1} \in R_i^*\}} \chi_{\{Z_{t_2-1} \in R_i^*\}} \right. \\ & \quad \left. \cdot E\left[(H_i^{-1} \otimes \varepsilon_{t_2}^{(i)})' / \mathcal{F}_{t_2-1} \right] \right\} = 0 \end{aligned}$$

即(a)得证.

由(5)及(a)得

$$E(q_n q_n') = \frac{1}{n} \sum_{i=1}^n \xi_i^{(i)} \xi_i^{(i)'} \quad (6)$$

因为 $(H_i^{-1} \otimes \varepsilon_i^{(i)}) X_{t-1} = [(H_i^{-1})' \otimes \varepsilon_i^{(i)}] [X_{t-1}']^c = (\varepsilon_i^{(i)} X_{t-1}' H_i^{-1})^c \quad (7)$

若令

$$Q_t = \varepsilon_t^{(i)} X_{t-1}' H_i^{-1} \chi_{\{Z_{t-1} \in R_i^*\}}$$

则有

$$\begin{aligned} E[Q_i^c (Q_i^c)'] &= E(Q_i \otimes Q_i) \\ &= E[(H_i^{-1} \otimes \varepsilon_i^{(i)}) (X_{t-1}' \otimes X_{t-1}') (H_i^{-1} \otimes \varepsilon_i^{(i)'}) \chi_{\{Z_{t-1} \in R_i^*\}}] \\ &= E\{(X_{t-1}' \otimes X_{t-1}') \chi_{\{Z_{t-1} \in R_i^*\}}\} \cdot E[(H_i^{-1} \otimes \varepsilon_i^{(i)}) (H_i^{-1} \otimes \varepsilon_i^{(i)'}) / \mathcal{F}_{t-1}] \\ &= E\{(X_{t-1}' X_{t-1}') \chi_{\{Z_{t-1} \in R_i^*\}}\} \cdot E[(H_i^{-1} H_i^{-1}) \otimes (\varepsilon_i^{(i)} \varepsilon_i^{(i)'}) / \mathcal{F}_{t-1}] \\ &= E\{(X_{t-1}' X_{t-1}') \chi_{\{Z_{t-1} \in R_i^*\}}\} \cdot H_i^{-1} H_i^{-1} \otimes E(\varepsilon_i^{(i)} \varepsilon_i^{(i)'}) \\ &= H_i (H_i^{-1} H_i^{-1}) \otimes G_i = [(\Delta_i^{-1})' \otimes T_i] [\Delta_i^{-1} \otimes T_i'] \quad (8) \end{aligned}$$

由(4)、(6)、(8)式, 可得

$$\begin{aligned} E\left(q_n^{(i)} q_n^{(i)'}\right) &= \frac{1}{n} \sum_{i=1}^n E\left(\xi_i^{(i)} \xi_i^{(i)'}\right) \\ &= \frac{1}{n} \sum_{i=1}^n (A^c)' (\Delta_i' \otimes T_i^{-1}) E[Q_i^c (Q_i^c)'] (\Delta_i' \otimes T_i^{-1})' A^c \\ &= (A^c)' \left\{ [\Delta_i' (\Delta_i')^{-1}] \otimes (T_i^{-1} T_i) \right\} \left\{ (\Delta_i^{-1} \Delta_i) \otimes [T_i' (T_i')^{-1}] \right\} A^c \\ &= (A^c)' (A^c) > 0 \end{aligned}$$

故(b)得证. ■

有了上述几个引理, 可得

定理 3 $\sqrt{n} (\Delta_i' \otimes T_i^{-1}) (\hat{\phi}^{(i)} - \phi^{(i)})^c \xrightarrow{d} N(0, I) \quad (n \rightarrow \infty) \quad i = 1, 2.$

证明 因为 $\hat{\phi}^{(i)} - \phi^{(i)} \sim \frac{1}{n} \sum_{i=1}^n \varepsilon_t^{(i)} X_{t-1}' H_i^{-1} \chi_{\{Z_{t-1} \in R_i^*\}} \quad i = 1, 2.$

其中, 符号“ \sim ”表示渐近相等.

为证定理 3, 只需证

$$\frac{1}{\sqrt{n}}(\Delta'_i \otimes T_i^{-1}) \sum_{i=1}^n Q_i^c \xrightarrow{d} N(0, I) \quad (n \rightarrow \infty) \quad i=1,2.$$

这又等价于要证, 对任意的常数矩阵 A ,

$$\frac{1}{\sqrt{n}}(A^c)' (\Delta'_i \otimes T_i^{-1}) \sum_{i=1}^n Q_i^c \xrightarrow{d} N(0, (A^c)' A^c) \quad (n \rightarrow \infty) \quad i=1,2.$$

由(4)、(5)、(7)三式可知, 亦即要证

$$q_n^{(i)} \xrightarrow{d} N(0, (A^c)' A^c) \quad (n \rightarrow \infty), \quad i=1,2. \quad (9)$$

注意到 $q_n^{(i)} = \frac{1}{\sqrt{n}} \sum_{i=1}^n \xi_i^{(i)}$ 及引理3和引理4, 根据[8]的定理23.1, 可得(9)式成立, 从而定理3得证 ■

参 考 文 献

- 1 马洪, 孙尚清. 中国经济结构研究. 1982年版, 二卷本, 北京人民出版社, 1982
- 2 邹至庄. 中国经济. 南开大学出版社, 1984
- 3 Zhou Zhi-Zhuang. Journal of Political Economg, 1985
- 4 中国统计年鉴. 中国国家统计局, 1983
- 5 范文宁, 邓集贤. 应用概率统计, 1986, 2(3): 259~266
- 6 宋心远, 邓集贤. 中山大学学报(自然科学版), 1990, 29(1): 23~28
- 7 Tweedic R L. Stoch Proc Appl. 1975, 3: 385~403
- 8 Billingsleg B. Convergence of Probability Measure. Academic, New York, 1968
- 9 Stout W F. Almost Sure Convergence. Academic, London. 1974
- 10 Haanan E J. Multiple Time Series. Willeg, New York. 1970

The Application of the First Order Close Cycle TAR Model with Asymptotic Properties of Coefficient Estimations

Deng Jixian* Fan Wenning Song Xinyuan

Abstract We used the first order close cycle TAR model (with one-dimension) to fit the data of consumption and investment in China. By converting the model into the first order SETAR model (with two-dimension), we studied the estimations of the coefficients and obtained a sufficient condition for the strong consistency and asymptotic normality of the coefficient estimators.

Keywords consumption and investment, strong consistency, asymptotic normality

* Department of Mathematics