

稻纵卷叶螟幼虫的最优控制

丘兆福 周勤学

(数学系)

摘要 本文从稻纵卷叶螟的 Leslie 模型出发,引入控制变量,建立状态方程和目标函数,给出了目标函数中挽回经济损失函数的数学表达式,并通过数值计算得到防治稻纵卷叶螟幼虫的经济阈值。

关键词 状态方程,目标函数,经济阈值

1 稻纵卷叶螟的动态模型——Leslie模型

以稻纵卷叶螟的自然种群生命表和实验种群生命表为基础^(1~2),可得到如下的 Leslie 动态模型:

$$\mathbf{x}^{(k+1)} = \mathbf{A}\mathbf{x}^{(k)}, \quad k = k_0, \dots, K, \quad \mathbf{x}^{(k_0)} = \mathbf{x}^0 \quad (1)$$

式中, $\mathbf{x}^{(k)}$ 和 $\mathbf{x}^{(k+1)}$ 分别表示稻纵卷叶螟在 k 时段和 $k+1$ 时段的状态向量。 \mathbf{A} 是 Leslie 转移矩阵。

由稻纵卷叶螟的生命表可知,从卵到成虫经历 8 个虫态:卵, 1~5 龄幼虫,蛹和成虫。各虫态的历期长短不一,整个生命周期也随气温而变化。如果将 8 个虫态看作 $\mathbf{x}^{(k)}$ 的 8 个分量,从一个虫态到下一个虫态作为一个时段,则时段不等长,更重要的是不能很好反映虫的数量随时间变化的规律。又若以天数作为时段单位,由于气温不同,从卵到成虫的经历天数也不同,难以确定状态向量 $\mathbf{x}^{(k)}$ 的分量。根据生物学原理,稻纵卷叶螟达到一定的有效积温,它的生命周期就完成了,而且各虫态的有效积温是一定的。从卵到成虫死亡总有效积温为 630 日度⁽¹⁾,以 14 日度作为一个时段单位,并与此相适应,各虫态根据其有效积温数划分为若干龄级,8 个虫态的龄级数分别为 5, 5, 4, 4, 5, 5, 14 和 5⁽³⁾。我们用符号 $x_{ij}^{(k)}$ 记 k 时段第 i 个虫态第 j 个龄级的公顷密度,则状态向量 $\mathbf{x}^{(k)} \in R_+^{47}$ 。

Leslie 转移矩阵 $\mathbf{A} \in R^{47 \times 47}$, 用分块矩阵表示为

$$\mathbf{A} = \begin{pmatrix} 0 & 0 & \dots & \mathbf{A}_0 \\ \mathbf{A}_1 & \mathbf{A}_2 & & \\ & & \ddots & \\ & & & \mathbf{A}_8 \end{pmatrix} \quad (2)$$

式中, $A_0 = (0, 0, f_1, f_2, f_3)$, f_1, f_2, f_3 表示成虫在产卵期的产卵率, 数值^[2]为 $f_1 = 20.2, f_2 = 22.8, f_3 = 10.1$, 以 \ln 记 n 阶单位矩阵, 其他各分块矩阵为:

$$A_1 = 0.996 I_5; \quad A_2 = 0.941 I_5; \quad A_3 = 0.927 I_4; \quad A_4 = 0.916 I_4; \\ A_5 = 0.980 I_5; \quad A_6 = 0.921 I_5; \quad A_7 = 0.976 I_{14}; \quad A_8 = [I_4, 0].$$

2 稻纵卷叶螟的防治模型——状态方程

对稻纵卷叶螟的防治措施很多, 通常在某一时段只采取其中一种措施, 在式(1)中引入单控制变量 u_k , 得到状态方程:

$$x^{(k+1)} = Ax^{(k)} - B(u_k)x^{(k)}, \quad k = k_0, \dots, K, \quad x^{(k_0)} = x^0 \quad (3)$$

$$u_k \in U \quad (4)$$

式(3)中的 $B(u_k)$ 为防治效率矩阵, 式(4)中的 U 是控制集合, 是一个有限点集, 包含所有可能的防治措施. 表1是防治稻纵卷叶螟幼虫的一些措施^[4]. 把可供选择的防

表1 防治稻纵卷叶螟幼虫的一些措施

Tab.1 Measures of controlling rice leaf-roller

措施	公顷用量	方法	效率(%)	措施	公顷用量	方法	效率(%)
甲敌粉	22500克	喷雾	79.65	乐果	1500克	喷雾	62.2
甲六粉	22500克	喷雾	86.84	杀虫双	2250克	根施	76.8
敌百虫	1500克	喷雾	49.84	杀虫单	1500克	根施	85.4
杀虫脒	3000克	喷雾	90	青虫菌	7500克	喷雾	89.99

治措施编号. 记为集合 U 中的点. 根据表1, 集合 U 可记为

$$U = \{0, 0.7965, 0.8684, 0.4984, 0.9000, 0.6220, 0.7680, 0.8540, 0.8999\}$$

其中零表示不采取任何防治措施, 其它数字分别为不同防治措施的防治效率. 防治效率矩阵 $B(u_k) \in R^{47 \times 47}$. 假设上述措施仅对幼虫有防治效果, 而且对各龄级都相同, 其余虫态暂不考虑, 则有

$$b_{ij} = \begin{cases} u_k, & i = 6, 7, \dots, 28; \quad j = i - 1 \\ 0, & \text{其余} \end{cases} \quad (5)$$

$$B(u_k) = [b_{ij}(u_k)]_{47 \times 47}$$

3 目标函数

我们的目标函数为

$$J = \sum_{k=k_0}^K [r(u_k, x^{(k)}) - C(u_k)] \quad (6)$$

式中, $C(u_k)$ 是防治费用函数(包括人工费, 药物费和器械费), 函数 $r(u_k, x^{(k)})$ 表示防治所挽回的经济损失. 稻纵卷叶螟所造成的经济损失在于幼虫取食稻叶, 稻叶受损使水稻减产. 通过接虫对比实验发现^[3], 幼虫一生食叶量为 $2179 \pm 211.05 \text{mm}^2$, 1龄幼虫食叶量占总食量的0.63%~0.7%, 2龄占1.1%~1.2%, 3龄占2.6%~3.9%, 4龄

占7.7%~10.3%, 5龄占79.1%~89.6%。幼虫公顷密度为N, 则造成的产量损失百分比为

y = (-0.0032 + 0.026N) / 375000 (7)

在计算函数r(u_k, x^(k))时, 不能简单地把杀死的幼虫数当作(7)式中的N来计算。一方面由于幼虫在不同阶段食叶量差别很大, 另一方面在某时段杀死的幼虫数在往后由于自然死亡率的因素会递减, 不能全部归功于防治。因此必须考虑幼虫从某龄级开始至进入蛹时在自然条件下的数量变动及食叶量。

表2 卷叶螟幼虫食叶量

Tab.2 Leaf consuming amount of Larvae

Table with 4 columns: 虫态 (Larval stage), 食叶量(%) (Leaf consumption %), 具有龄级数 (Number of instars), 龄级平均食叶量(%) (Average leaf consumption per instar %). Rows show stages 1 to 5 with values like 0.7, 1.2, 3.6, 10, 84.5 for consumption and 5, 4, 4, 5, 5 for instars.

在自然条件下某龄级幼虫至5龄末的食叶量的百分比, 应等于从该龄级起至5龄末止各龄级食叶量占幼虫一生总食叶量的百分比的加权, 表2是幼虫各龄级食叶量百分比。表3是幼虫从某一龄级起至5龄末的自然存活率, 权数就是表3的存活率, 可由式(1)动态方程计算得到。由表2和表3可算得表4。

表3 各龄级幼虫自然存活率

Tab.3 Natural survival rate of different cohort

Large data table with columns labeled 121 to 185 and rows labeled 121 to 185. It contains numerical values representing survival rates across different cohorts and stages.

用向量 $w \in R^{47}$ 记稻纵卷叶螟的危害系数向量，衡量其食叶的多少，显然 $w_6 \sim w_{28}$ 即为表4中1龄幼虫第4龄级至5龄幼虫第5龄级的食叶量百分比，卵、蛹和成虫不食稻叶，因此 w 的其余分量为0。现在式(7)

$$y = (-0.0032 + 0.026N) / 375000 \\ = (-0.0032 + 0.26w^T B(u_k) x^{(k)}) / 375000 \quad (8)$$

表示在 k 时段采取防治措施 u_k 所挽回的公顷产量损失百分比。记 p 为每公斤稻谷价格， q 为每公顷无虫害水稻产量(公斤)，则目标函数式(6)的 $r(u_k, x^{(k)})$ 可表为

$$r(u_k, x^{(k)}) = pqy = pq[-0.0032 + 0.026w^T B(u_k) x^{(k)}] / 375000 \quad (9)$$

表4 各龄级幼虫至5龄末的总食叶量

Tab.4 Leaf consuming total amount of larvae

虫态	龄级	总食叶量 (%)	虫态	龄级	总食叶量 (%)	虫态	龄级	总食叶量 (%)
1龄	1	31.85	2龄	1	42.29	3龄	1	55.68
	2	33.98		2	45.84		2	60.03
	3	35.79		3	48.79		3	64.49
	4	37.73		4	52.07		4	69.50
	5	39.94	4龄	1	72.16	5龄	1	72.16
2	74.89	2		60.00	2		60.00	
3	74.28	3		46.80	3		46.80	
4	73.80	4		32.46	4		32.46	
5	73.23	5		16.90	5		16.90	
	5	72.73						

4 防治策略分析

对稻纵卷叶螟幼虫的最优控制问题，就是已知 k_0 时刻稻纵卷叶螟的公顷密度状态向量 $x^{(k)} = x^0$ ，从 k_0 时刻起至 K 时刻止，选择一系列 $u_k^* \in U$ ，满足状态方程(3)，并使目标函数式(6)达到最大值。通常要求式(6)的值大于0(取得正的经济效益)。

u_k^* 即为最优防治策略。这个最优控制问题就是要选择防治时机和防治措施的问题。

(1) 防治措施。由于防治费用由人工费用、药物费用和器械费用三者组成，而人工费用和器械费用占有较大的比重，约占60%~70%，药物费用比重较小，因此，为了使目标函数式(6)达到最大值，防治措施的选择主要考虑防治效率，即选择高效(对稻纵卷叶螟有较高的杀灭率，使 $r(u_k, x^{(k)})$ 尽可能大)，低毒(减少对人畜和稻纵卷叶螟天敌的危害)的药物。

(2) 防治时机。由动态方程(1)可知，在自然条件下，同一世代的稻纵卷叶螟幼虫呈单调下降趋势。假设1龄第一龄级幼虫的公顷密度 x_{21} 为300000，由表3和表4容易算出在2龄1级，3龄1级，4龄1级和5龄1级的公顷密度 x_{31} ， x_{41} ， x_{51} 和 x_{61} ，以及在相应时刻采用防治效率90%的措施(杀虫脒3000克喷雾)所得到的式(8)的 y 值(见表5)。

表5 不同防治时机的比较

Tab.5 Comparison of different control stage

项 目	x21	x31	x41	x51	x61
公顷密度	300000	221400	164700	115200	104100
y 值	0.00596	0.00584	0.00572	0.00538	0.00469

由表5知, y 值是单调下降的。而目标函数式(6)中的挽回损失函数 $r(u_k, x^{(k)})$ 由式(9)知与 y 值成正比。由此可见, 在 $C(u_k)$ 相同的情况下, 越早防治, 目标函数式(6)的值越大。而且虫害造成的既成损失越小。

为了取得正的经济效益, 不进行得不偿失的防治, 为此要求

$$r(u_k, x^{(k)}) \geq C(u_k) \quad (10)$$

把使式(10)取等号时的公顷密度状态向量 $x^{(k)}$ 称为最低必要防治密度。

例如: 每公顷用杀虫脒3000克喷雾, $u_k = 0.90$, $C(u_k) = 45$ 元。无虫害水稻每公顷产6000公斤, 每公斤稻谷0.50元, 由式(9)和(10), 则最低必要防治密度 $x^{(k)}$ 应满足

$$w^T B(0.9)x^{(k)} \leq 108274.9225 \quad (11)$$

我们把最低必要防治密度简称为经济阈值。如果仅存在单一龄级的幼虫(向量 $x^{(k)}$ 只有一个分量非零), 则由式(11)可算得各龄级的经济阈值(见表6)。

表6 经济阈值

Tab.6 Economic threshold

虫态	龄级	公顷密度	百丛密度	虫态	龄级	公顷密度	百丛密度
1龄	1	377370	101	2龄	1	284220	76
	2	353715	94		2	264810	71
	3	335835	90		3	246345	66
	4	321975	85		4	230835	62
	5	300930	80	4龄	1	160050	43
3龄	1	215865	58		2	161820	43
	2	199320	53		3	162870	43
	3	186375	50		4	164115	44
	4	172935	46		5	165255	44
5龄	1	166560	44				
	2	200325	53				
	3	256830	68				
	4	370290	99				
	5	711210	190				

表6给出了以幼虫龄级为参照的经济阈值。通过田间虫情调查, 便可确定是否必要采取防治措施。在几个龄级的幼虫共存的情况下, 由式(11)也不难确定防治的必要与否。必须指出的是, 表6中给出的5龄幼虫后期的经济阈值很高, 这是由于幼虫即将成

蛹, 食叶量很少的缘故, 但是为了抑制下一代的虫口密度, 在低于阈值水平下采取适当防治措施还是值得的。

5 结 语

本文以稻纵卷叶螟的Leslie模型出发, 建立最优控制模型, 给出了目标函数中挽回损失函数的具体表达式, 得出防治越早越好的结论。而不是等到食叶量大的3龄幼虫以后才进行防治; 给出最低必要防治密度的判别式(11)和以幼虫龄级为参照的经济阈值, 当虫口密度超过经济阈值时才防治, 而不是有虫必治, 从而防止农药的滥用和浪费; 经济阈值随着幼虫龄级的变化而变化, 不是定值。本文得到3龄幼虫的经济阈值为百丛密度46~58, 这与文[5]的结果是一致的。本文给出的数值结果是针对危害水稻的幼虫而言, 但若给出有关对卵、蛹和成虫的防治数据, 则由本文建立的模型同样可得到相应的结果。文中数值结果的准确性依赖于稻纵卷叶螟的自然存活率, 由于各地生态环境的差异, 存活率必然有差别。因此文中的具体数据仅供参考。

参 考 文 献

- 1 张润杰, 古德祥. 以温度为基础的稻纵卷叶螟发育模拟模型. 中山大学学报论丛(自然科学), 1989, 8(1): 16
- 2 张润杰, 古德祥. 稻纵卷叶螟实验种群模拟模型. 中山大学学报论丛(自然科学), 1989, 8(1): 30~35
- 3 张润杰, 古德祥, 蒲蛰龙. 稻纵卷叶螟—水稻生态系统的模拟分析. 中山大学学报论丛(自然科学), 1989, 8(1): 46~50
- 4 张润杰, 古德祥, 蒲蛰龙. 稻纵卷叶螟综合管理决策. 中山大学学报论丛(自然科学), 1989, 8(1): 99
- 5 张润杰, 古德祥, 温国能. 稻纵卷叶螟的经济损失水平和经济阈值. 中山大学学报论丛(自然科学), 1989, 8(1): 95

Optimal Control for Rice Leaf-roller

Qiu Zhuafu* Zhou Qinxue

Abstract Based on Leslie model of rice leaf-roller, the control variables are introduced, the state equations and objective function are developed and the expression of saving economic loss function in the objective function is presented. The economic threshold of controlling rice leaf-roller is obtained by numerical calculation,

Keywords state equations, objective function, economic threshold

* Department of Mathematics