中山大学学报（自然科学版）
第32卷 第2期 1993年
ACTA SCIENTIARUM NATURALIUM UNIVERSITATIS SUNYATSENI
Vol.32 №.2 1993

经过指定边的Hamilton圈

娄定俊
（中山大学计算机科学系）

摘 要 本文证明，如果对图G的每一对不相邻的顶点u和v有$d_G(u)+d_G(v)\geqslant \nu+n$，那么$G$中任意$n$条独立边包含在$G$的一个Hamilton圈中；设$n$和$k$为正整数，且满足：$n\leqslant k-1$。如果$G$是$k$-连通图并且$G$的独立数$\alpha$满足：$\alpha\leqslant k-n$，那么，任意$n$条独立边包含在$G$的一个Hamilton圈中。

关键词 Hamilton圈，独立数，独立边

本文中，我们给出了任意n条独立边包含在G的一个Hamilton圈中的一些充分条件。

文中所有图都是有穷、连通、无向和简单的。设e_1，e_2，…，e_n为图G的n条边。e_1，e_2，…，e_n称为独立边是指e_i和e_j没有公共端点（$1\leqslant i<j\leqslant n$）。所有文内未定义的记号和术语均引自〔1〕。

引理1 设$e_i(i=1, 2, \cdots, n)$为n条独立边($n\geqslant 1$)。如果其中$(n-1)$条独立边包含在G的一个Hamilton圈中，G中存在Hamilton路包含e_1，e_2，…，e_n。

证明 假设其中$(n-1)$条独立边包含在G的一个Hamilton圈中。不妨设存在Hamilton圈C包含e_1，e_2，…，e_{n-1}。如果C包含e_n，删除C上不属于$\{e_1, e_2, \cdots, e_n\}$的一条边，剩下的路径是Hamilton路，且该路径包含$\{e_1, e_2, \cdots, e_n\}$。假设$C$不包含$e_n$，$e_n$是$C$的一条弦。设$C=x_1x_2\cdots x_\nu x_1$并且$e_n=x_ix_j(1\leqslant i<j\leqslant\nu)$。那么$x_{i+1}x_{i+2}\cdots x_jx_ix_{i-1}\cdots x_1x_\nu x_{\nu-1}\cdots x_{j+1}$是包含$e_1$，$e_2$，…，$e_n$的Hamilton路径。□

定理1 设图G满足条件：对G中每一对不相邻的顶点u和v，$d(u)+d(v)\geqslant\nu+n$。如果G中存在一条Hamilton路包含k条给定的独立边($k\leqslant n$)，那么G中存在一个Hamilton圈包含这k条独立边。

证明 设e_1，e_2，…，e_k为G的k条独立边。设$L=x_1x_2\cdots x_\nu$为包含e_1，e_2，…，e_k的Hamilton路。

如果x_1和x_ν相邻，那么存在包含e_1，e_2，…，e_k的Hamilton圈。因此我们假设x_1和x_ν不相邻。由本定理的条件$d(x_1)+d(x_\nu)\geqslant\nu+n$。由于对任意$v\in V(G)$，$d(v)\leqslant\nu-1$，因而$d(x_1)\geqslant n+1$，且$d(x_\nu)\geqslant n+1$。

断言1 如果x_1x_{i+1}和$x_\nu x_i\in E(G)$对某个i成立（$1\leqslant i\leqslant\nu-1$）并且$x_ix_{i+1}\notin\{e_1, e_2, \cdots, e_k\}$，那么存在Hamilton圈包含$e_1$，$e_2$，…，$e_k$。

本文1990年6月27日收到

圈$x_1x_{i+1}x_{i+2}\cdots x_\nu x_i x_{i-1}\cdots x_1$是包含$e_1$，$e_2$，…，$e_k$的Hamilton圈。

设$e_i=u_iv_i(i=1, 2, \cdots, k)$。不失一般性，假设在$L$上从$x_1$到$x_\nu$，$u_1$，$v_1$，$u_2$，$v_2$，…，$u_k$，$v_k$依次出现。

设　$S=\{x_i \mid x_1x_{i+1}\in E(G)$且$x_{i+1}\notin\{v_1, v_2, \cdots, v_k\}\}$

　　$T=\{x_i \mid x_\nu x_i\in E(G)\}$。

假设不存在Hamilton圈包含e_1，e_2，…，e_k。

$S\neq\phi$因为$d(x_1)\geqslant n+1$。如果$S\cap T\neq\phi$，断言1的情况发生，因而存在Hamilton圈包含e_1，e_2，…，e_k。因此我们假设$S\cap T=\phi$。

$$|S\cup T|=|S|+|T|-|S\cap T|=|S|+|T|\leqslant\nu-1 \tag{1}$$

$$d(x_1)\leqslant|S|+k,\qquad d(x_\nu)=|T| \tag{2}$$

由(1)和(2)

$$d(x_1)+d(x_\nu)\leqslant|S|+k+|T|\leqslant\nu-1+k \tag{3}$$

(3)式与$d(x_1)+d(x_\nu)\geqslant\nu+n$矛盾。　□

定理 2　设e_1，e_2，…，e_n为G的任意n条独立边。如果对G中每一对不相邻的顶点u和v，$d_G(u)+d_G(v)\geqslant\nu+n$，$G$中存在Hamilton圈包含$e_1$，$e_2$，…，$e_n$。

证明　假设G中不存在Hamilton圈包含e_1，e_2，…，e_n。设$k(0\leqslant k<n)$是满足以下条件的最大整数：任意k条独立边包含在G的一个Hamilton圈中。由引理1，任意$k+1$条独立边f_1，f_2，…，f_{k+1}包含在G的一条Hamilton路中。由定理1，f_1，f_2，…，f_{k+1}包含在G的一个Hamilton圈中。这与k的假设矛盾。　□

以下提供另一个任意n条独立边包含在一个Hamilton圈中的充分条件。该条件使用连通度和独立数。设C是一个有向圈。用$C[x,y]$表示C上按照C的方向，从x到y的路段。

引理 2　如果G是$(k+1)$-连通的，任意k条独立边包含在G的一个圈中。

证明　参见[2]。　□

定理 3　设n和k为正整数满足：$n\leqslant k-1$。如果G是k-连通图并且G的独立数α满足：$\alpha\leqslant k-n$，那么，G中任意n条独立边包含在G的一个Hamilton圈中。

证明　设e_1，e_2，…，e_n为G的n条独立边。由于$n\leqslant k-1$，由引理2，存在圈包含e_1，e_2，…e_n。设C是包含e_1，e_2，…，e_n的最长圈。设$C=x_0x_1\cdots x_{t-1}x_0$，$e_i=u_iv_i$ $(i=1, 2, \cdots, n)$。不失一般性，设u_1，v_1，u_2，v_2，…，u_n，v_n在C上按从x_0到x_{t-1}的方向依次出现。我们赋给C从x_0到x_{t-1}的方向。

假设C不是Hamilton圈。设x为C外的一点。如果$|V(C)|=t\leqslant k$，由k-连通性，从x到$V(C)$有t条路径P_1，P_2，…，P_t，其中P_i和P_j仅在x处相交$(1\leqslant i<j\leqslant t)$。不失一般性，设$P_i$连接$x$和$x_{i-1}(i=1, 2, \cdots, t)$。由于$e_1$，$e_2$，…，$e_n$是独立边，存在$j(1\leqslant j\leqslant t)$满足：$x_{j-1}x_j\neq e_i(i=1, 2, \cdots, n)$。在本文中所有下标是按模$t$计算的。故$P_{j+1}+C[x_j, x_{j-1}]+P_j$是包含$e_1$，$e_2$，…，$e_n$的圈，并且该圈比$C$长，矛盾。

以下假设$|V(C)|=t>k$。由k-连通性，x到$V(C)$有k条路径P_1，P_2，…，P_k，其中P_i和P_j仅在x处相交$(1\leqslant i<j\leqslant k)$。设$P_{i_1}$，$P_{i_2}$，…，$P_{i_m}$是其中的一些路径，满足：$P_{i_j}$在$C$上的端点和其在$C$上后继顶点之间的边不属于$\{e_1, e_2, \cdots, e_n\}(j=1, 2, \cdots,$

m)。$m\geqslant k-n$。设 x_{l_j} 为 P_{i_j} 在C上的端点($j=1,2,\cdots,m$)。不失一般性，设 x_{l_1}，x_{l_2}，$\cdots$，x_{l_m}在C上按照C的方向依次出现。如果对某个 j，$x_{l_{j+1}}$是x_{l_j} 在 C 上的后继顶点，按照上面的论证，存在圈包含 e_1，e_2，$\cdots$，e_n，该圈比 C 长，矛盾。因此，我们假设 x_{l_1}，x_{l_2} $\cdots$，x_{l_m}中任一顶点不是其中其它顶点的后继顶点。

考虑顶点集$\{x_{l_1+1}, x_{l_2+1}, \cdots, x_{l_m+1}\}$，即 x_{l_1}，x_{l_2}，$\cdots$，x_{l_m} 的后继顶点集。如果 x_{l_p+1} 和 x_{l_q+1} 相邻($1\leqslant p<q\leqslant m$)，那么 $P_{i_q}+C[x_{l_p+1}, x_{l_q}]+x_{l_p+1}x_{l_q+1}+C[x_{l_q+1}, x_{l_p}]+P_{i_p}$是包含$e_1$，$e_2$，$\cdots$，$e_n$的圈，该圈比$C$长，矛盾。

由于$\alpha\leqslant k-n$，$m\geqslant\alpha$。如果$m>\alpha$，x_{l_1+1}，x_{l_2+1}，$\cdots$，x_{l_m+1}不是独立顶点集。故存在边$x_{l_p+1}x_{l_q+1}$。因而得到以上矛盾。我们假定$m=\alpha$并且$\{x_{l_1+1}, x_{l_2+1},\cdots,x_{l_m+1}\}$是独立集。考虑$\{x,x_{l_1+1},x_{l_2+1},\cdots,x_{l_m+1}\}$。该集合不是独立集。但$\{x_{l_1+1},x_{l_2+1},\cdots,x_{l_m+1}\}$是独立集。故$x\,x_{l_p+1}$ 是G的一条边，其中$1\leqslant p\leqslant m$。但$xx_{l_p+1}+C[x_{l_p+1}, x_{l_p}]+P_{i_p}$是包含$e_1$，$e_2$，$\cdots$，$e_n$的圈，该圈比$C$长，矛盾。 □

参 考 文 献

1 Bondy J A, Murty U S R. Graph Theory with Applications. London: Macmillan Press, 1976

2 Häggkvist R, Thomassen C. Discrete Math, 1982, 41: 29～34

Hamiltonian Cycle Through Specified Edges

*Lou Dingjun**

Abstract It is proved that if for each pair of nonadjacent vertices u and v of G, $d_G(u)+d_G(v)\geqslant\nu+n$, then any n independent edges of G lie on a Hamiltonian cycle. Let n and k be positive integers such that $n\leqslant k-1$. We prove that if G is a k-connected graph, and if the independence number α of G satisfies $\alpha\leqslant k-n$, then any n independent edges lie on a Hamiltonian cycle of G.

Keywords Hamiltonian cycle, independence number, independent edges

* Department of Computer Science, Zhongshan University