

# 自然样条插值的一种新构造法

胡日章

(计算机科学系)

**摘要** 对由单边基表示的自然样条插值函数提出一种新的构造方法, 所得的线性方程组的系数矩阵对称且主对角线元素大部分非零, 具有节省存储、计算稳定等优点.

**关键词** 自然样条函数, 插值, 泛函极小

## 1 引言

熟知<sup>[1]</sup>, 自然样条函数作为泛函极小问题的解, 具有良好的变分性质. 设给定分划

$$a = x_0 < x_1 < \dots < x_k < x_{k+1} = b \tag{1}$$

和实数组  $\{y_i\}_1^k$ ,  $I_y = \{f(x) | f(x) \in H^m[a, b] \text{ 且 } f(x_i) = y_i, j = \overline{1, k}\}$ , 求  $s(x) \in I_y$ , 使

$$J(s) = \min_{f \in I_y} J(f) \tag{2}$$

其中

$$J(f) = \int_a^b (f^{(m)}(x))^2 dx$$

则有

$$S(x) = \sum_{i=1}^k \alpha_i (x - x_i)_+^{2m-1} / (2m-1)! + \sum_{i=1}^m \gamma_i x^{i-1} \tag{3}$$

系数  $\alpha = (\alpha_1, \dots, \alpha_k)^T$  和  $\gamma = (\gamma_1, \dots, \gamma_m)^T$  由下述线性方程组决定

$$\begin{bmatrix} A & B \\ B^T & 0 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} \alpha \\ \gamma \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} F \\ 0 \end{bmatrix} \tag{4}$$

其中,  $A = (a_{ij})_{k \times k}$ ,  $a_{ij} = (x_i - x_j)_+^{2m-1} / (2m-1)!$ ;  $B = (b_{ij})_{k \times m}$ ,  $b_{ij} = x_i^{j-1}$ ;

$$F = (y_1, \dots, y_k)^T$$

由于

$$a_{ii} \begin{cases} = 0 & i \leq j \\ > 0 & i > j \end{cases}$$

且一般地  $b_{ii} \neq 0$ , (4)的系数矩阵既不对称亦非三角矩阵, 且主对角线元素皆为零,

本文1990年8月20日收到

计算上不稳定.

本文将构造一组新的函数代替(3)中的 $(x-x_i)_+^{2m-1}/(2m-1)!$ ,  $i=1, \bar{k}$ , 使导出的线性方程组具有系数矩阵对称且矩阵 $A$ 的主对角线元素非零等优点.

## 2 辅助问题

与(2)不同, 考虑另一泛函极小问题. 令

$$\bar{J}(f) = \int_a^b (f^{(m)}(x))^2 dx + f(a)^2 + \dots + f^{(m-1)}(a)^2$$

求  $S(x) \in I_y$ , 使

$$\bar{J}(s) = \min_{f \in I_y} \bar{J}(f) \quad (5)$$

由于极小问题(2)和(5)的解都要求满足  $s(x_i) = y_i$ ,  $i=1, \bar{k}$ , 我们又将它们都称为插值问题. 对于(5), 给出刻划解的特征定理, 即

**定理 1** 如果  $s(x) \in I_y$  是插值问题(5)的解, 则对任  $g(x) \in I_0$  ( $I_0$  表示  $I_y$  当  $y_i = 0$ ,  $i=1, \bar{k}$  的特款)

$$\bar{a}(s, g) \equiv \int_a^b s^{(m)}(x) g^{(m)}(x) dx + \sum_{\mu=0}^{m-1} s^{(\mu)}(a) g^{(\mu)}(a) = 0 \quad (6)$$

反之, 若  $s(x) \in I_y$  且满足(6), 则它必是(5)的解.

**证明** 若  $s \in I_y$  是(5)的解, 由变分法,  $s$  的第一变分为零, 即

$$\delta \bar{J}(s) = 2 \int_a^b s^{(m)} \delta s^{(m)} dx + 2 \sum_{\mu=0}^{m-1} s^{(\mu)}(a) \delta s^{(\mu)}(a) = 0$$

对一切  $\delta s \in I_0$  成立, 即式(6)成立. 反之, 若  $s \in I_y$ , 则对任  $f \in I_y$ , 有  $(f-s) \in I_0$ ,  $\bar{a}(s, f-s) = 0$ ,

$$\bar{J}(f) = \bar{J}(s) + \bar{J}(f-s) + 2\bar{a}(s, f-s) \geq \bar{J}(s)$$

即  $s$  是(5)的解.

**定理 2** 插值问题(5)的解可表为

$$s(x) = \sum_{i=1}^k \alpha_i G(x, x_i) \quad (7)$$

其中

$$G(x, t) = \frac{(t-x)_+^{2m-1}}{(2m-1)!} + \sum_{\mu=0}^{m-1} \frac{(x-a)^\mu}{\mu!} \left\{ \frac{(a-t)_+^{2m-\mu-1}}{(2m-\mu-1)!} + (-1)^{m-\mu} \frac{(a-t)^\mu}{\mu!} \right\} \quad (8)$$

**证明** 根据定理 1, 可由(6)确定(5)的解, 对其左端分部积分, 得

$$\begin{aligned} & (-1)^m \int_a^b s^{(2m)}(x) \delta s(x) dx + \sum_{\mu=0}^{m-1} (-1)^{m-\mu-1} s^{(2m-\mu-1)}(b) \delta s^{(\mu)}(b) \\ & + \sum_{\mu=0}^{m-1} [(-1)^{m-\mu} s^{(2m-\mu-1)}(a) + s^{(\mu)}(a)] \delta s^{(\mu)}(a) = 0 \end{aligned}$$

由  $\delta s \in I_0$  的任意性, 得广义欧拉方程边值问题

$$\begin{cases} s^{(2m)}(x) = \sum_{j=1}^k \alpha_j \delta(x-x_j) & (9) \\ s^{(\mu)}(a) + (-1)^{m-\mu} s^{(2m-\mu-1)}(a) = 0 & (10) \\ s^{(2m-\mu-1)}(b) = 0 & (11) \end{cases} \quad \mu = \overline{0, m-1}$$

其中  $\delta$  为 Dirac 函数, 由于对应的齐边值问题只有恒零解, 今求 Green 函数, 它形如

$$G(x, t) = \frac{(t-x)^{2m-1}}{(2m-1)!} + \sum_{\mu=0}^{2m-1} \alpha_{\mu}(t) \frac{(x-a)^{\mu}}{\mu!}$$

由(11),  $\alpha_{\mu}(t) \equiv 0$ ,  $\mu = \overline{m, 2m-1}$ , 再由(10), 对  $\mu = \overline{0, m-1}$ ,

$$\begin{aligned} G^{(\mu, 0)}(a, t) + (-1)^{m-\mu} G^{(2m-\mu-1, 0)}(a, t) \\ = (-1)^{\mu} \frac{(t-a)^{2m-\mu-1}}{(2m-\mu-1)!} + (-1)^{m-1} \frac{(t-a)^{\mu}}{\mu!} + \alpha_{\mu}(t) = 0 \\ \alpha_{\mu}(t) = \frac{(a-t)^{2m-\mu-1}}{(2m-\mu-1)!} + (-1)^{m-\mu} \frac{(a-t)^{\mu}}{\mu!} \end{aligned}$$

从而  $G(x, t)$  形如(8), 所以

$$s(x) = \int_a^b G(x, t) \sum_{j=1}^k \alpha_j \delta(t-x_j) dt = \sum_{j=1}^k \alpha_j G(x, x_j)$$

**定理 3** 插值问题(5)存在唯一的形如(7)的解, 其系数  $\bar{\alpha} = (\alpha_1, \dots, \alpha_k)^T$  由下式对称方程组决定

$$A\bar{\alpha} = F \quad (12)$$

其中,  $A = (a_{ij})_{k \times k}$ ,  $a_{ij} = G(x_j, x_i)$ ,  $F = (y_1, \dots, y_k)^T$ .

**证明** 显然, 形如(7)的函数中存在(5)的唯一解当且仅当对应的齐问题只有零解. 设它为  $s_0(x)$ , 则  $s_0(x) \in I_0$ , 在(6)中取  $g = s = s_0$ , 得

$$\int_a^b (s_0^{(m)})^2 dx + \sum_{\mu=0}^{m-1} (s_0^{(\mu)}(a))^2 = 0$$

从而  $s_0^{(m)}(x) = 0$ ,  $x \in [a, b]$ ;  $s_0^{(m-1)}(a) = \dots = s_0(a) = 0$

由此得  $s_0(x) \equiv 0$ . 将插值条件代入(7)得(12), 由  $G(x, t)$  关于  $x, t$  对称得  $A$  对称, 显然  $a_{ii} = G(x_i, x_i) \neq 0$ .

### 3 插值问题(2)的解的构造

**定理 4** 如果  $s(x) \in I_y$  是插值问题(2)的解, 则对任  $g(x) \in I_0$ ,

$$a(s, g) \equiv \int_a^b s^{(m)}(x) g^{(m)}(x) dx = 0 \quad (13)$$

反之, 若  $s(x) \in I_y$  且满足(13), 则它必为(5)的解.

证明与定理 2 完全类似, 从略.

类似上节, 利用(13)导出(5)的解  $s(x)$  需满足下面的广义欧拉方程边值问题

$$\begin{cases} s^{(2m)}(x) = \sum_{i=1}^k \alpha_i \delta(x-x_i) & (14) \\ s^{(2m-\mu-1)}(a) = 0 & (15) \\ s^{(2m-\mu-1)}(b) = 0 & (16) \end{cases}$$

$$\mu = \overline{0, m-1}$$

相应的齐边值问题有非零解, 显然凡  $p(x) \in P_m \langle x \rangle = \{\gamma_1 + \gamma_2 x + \dots + \gamma_m x^{m-1}, \gamma_i \in R\}$  都是它的解, 故不能求得通常意义的Green函数。但注意上节得到的  $G(x, t)$  仅不满足(15),

$$\text{令 } s(x) = \sum_{i=1}^k \alpha_i G(x, x_i) + \sum_{i=1}^m \gamma_i x^i \quad (17)$$

则  $s(x)$  满足(14)和(16), 欲使它成为(2)的解, 尚需满足插值条件及边值条件(15), 而这些条件的数目恰与(17)中的参数个数相同。

**引理 1** 形如(17)的函数若是插值问题(2)的解, 则对任  $f(x) \in H^m[a, b]$ ,

$$a(s, f) = (-1)^m \sum_{i=1}^k \alpha_i f(x_i) \quad (18)$$

证明利用(14)~(16)和分部积分可得。

下面是本文的主要结果

**定理 5** 当  $k \geq m$ , 插值问题(2)有唯一的形如(17)的解, 系数  $\alpha = (\alpha_1, \dots, \alpha_k)^T$ ,  $\gamma = (\gamma_1, \dots, \gamma_m)^T$  由对称方程组

$$\begin{bmatrix} A & B \\ B^T & 0 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} \alpha \\ \gamma \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} F \\ 0 \end{bmatrix} \quad (19)$$

决定。其中  $A, F$  如同(12),  $B$  如同(4)。

**证明** 由上分析, 只需证明相应的齐插值问题只有零解, 因为边值条件(15)也是齐次的。设它为  $s_0(x)$ , 在(13)中取  $s = g = s_0$  得

$$\int_a^b (s_0^{(m)})^2 dx = 0$$

从而  $s_0^{(m)}(x) = 0$ ,  $s_0$  是小于  $m$  次的多项式, 而有  $k \geq m$  个零点, 故  $s_0 \equiv 0$ 。下面证明  $s(x)$  由(19)决定, 由插值条件得

$$(A, B) \begin{pmatrix} \alpha \\ \gamma \end{pmatrix} = F \quad (20)$$

再令  $s(x)$  满足(15), 从而满足(13), 由引理

$$a(s, x^{l-1}) = (-1)^m \sum_{i=1}^k \alpha_i x_i^{l-1} = 0 \quad l = \overline{1, m}$$

此即

$$B^T \alpha = 0 \quad (21)$$

从而(19)成立。由于  $A$  对称, 故(19)为对称方程组。

对广义自然样条插值问题, 即给定数据  $\{y_j^\mu\}_{j=0}^{k+1}, \mu_{j=0}^{\gamma_j-1}, 0 \leq \gamma_j \leq m$ 。令

$\tilde{I}_y = \{f(x) | f(x) \in H^m[a, b], \text{ 且 } f^{(\mu)}(x_j) = y_j^\mu\}$ , 求  $s(x) \in \tilde{I}_y$ , 使

$$J(s) = \min_{f \in \tilde{I}_y} J(f) \quad (22)$$

此处  $J(f)$  同(2)。令  $n = \sum_{i=0}^{k+1} \gamma_i$ , 有

**定理 6** 若  $n \geq m$ , 则对任意数据  $\{y_j^\mu\}$ , 插值问题(22)有下述形式的解

$$s(x) = \sum_{i=0}^{k+1} \sum_{\mu=0}^{\gamma_i-1} \alpha_{i\mu} G^{(0,\mu)}(x, x_i) + \sum_{i=1}^m \gamma_i x^{i-1} \quad (23)$$

其系数  $\alpha = (\alpha_{0,0}, \dots, \alpha_{0,\gamma_0-1}, \dots, \alpha_{k+1,0}, \dots, \alpha_{k+1,\gamma_{k+1}-1})^T$ ,  $\gamma = (\gamma_1, \dots, \gamma_m)^T$  仍由形如(19)的对称方程组决定。其中

$$A = (a_{ij}^{\mu'\mu}) \quad , \quad a_{ij}^{\mu'\mu} = G^{(\mu',\mu)}(x_i, x_j) \quad , \quad \begin{matrix} \mu' = \overline{0, \gamma_i - 1} \\ \mu = \overline{0, \gamma_j - 1} \end{matrix} \quad , \quad \begin{matrix} i, j = \overline{0, k+1} \end{matrix}$$

$$B = (b_{ij}^{\mu'}) \quad , \quad b_{ij}^{\mu'} = x^{(i-\mu'-1)} \Big|_{x=x_i} \quad , \quad \begin{matrix} \mu' = \overline{0, \gamma_i - 1} \\ i = \overline{0, k+1} \end{matrix} \quad , \quad \begin{matrix} j = \overline{1, m} \end{matrix}$$

证明与定理 5 类似, 从略。需要指出的是定理的结论对更广泛的 HB 插值仍成立, 即对每一点的插值导数阶不必规定为  $\mu = \overline{0, \gamma_i - 1}$ , 而换为  $\mu \in I_i \subset I = \{0, 1, \dots, m-1\}$ 。

## 4 数值例子

**例 1** 设  $m = 2$ ,  $x_0 = 0$ ,  $x_1 = 1$ ,  $x_2 = 2$ ,  $x_3 = 3$ , 插值条件为  $s(1) = 1$ ,  $s(2) = 2$ ,  $s(3) = 1$ , 利用(4)和(19)均求得

$$s(x) = -\frac{1}{2}(x-1)_+^3 + (x-2)_+^3 - \frac{1}{2}(x-3)_+^3 + \frac{3}{2}x - \frac{1}{2}$$

(4)和(19)的系数矩阵分别为

$$\begin{pmatrix} 0 & 0 & 0 & 1 & 1 \\ 1/6 & 0 & 0 & 2 & 1 \\ 4/3 & 1/6 & 0 & 3 & 1 \\ 1 & 2 & 3 & 0 & 0 \\ 1 & 1 & 1 & 0 & 0 \end{pmatrix} \quad \begin{pmatrix} 14/6 & 23/6 & 32/6 & 1 & 1 \\ 23/6 & 23/3 & 70/6 & 2 & 1 \\ 32/6 & 70/6 & 114/6 & 3 & 1 \\ 1 & 2 & 3 & 0 & 0 \\ 1 & 1 & 1 & 0 & 0 \end{pmatrix}$$

**例 2** 考虑广义自然样条插值, 插值条件为 HB 型。  $m = 2$ ,  $x_0 = 0$ ,  $x_1 = 1$ ,  $x_2 = 2$ , 要求满足  $s(0) = 1$ ,  $s'(1) = 0$ ,  $s(2) = 1$ 。线性方程组为

$$\begin{pmatrix} 1 & 0 & 1 & 0 & 1 \\ 0 & 2 & 7/2 & 1 & 0 \\ 1 & 7/2 & 23/3 & 2 & 1 \\ 0 & 1 & 2 & 0 & 0 \\ 1 & 0 & 1 & 0 & 0 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} \alpha_1 \\ \alpha_2 \\ \alpha_3 \\ \gamma_1 \\ \gamma_2 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 1 \\ 0 \\ 1 \\ 0 \\ 0 \end{pmatrix}$$

求得的解为  $s(x) = 2(-x)_+^3 + 6(1-x)_+^2 - 2(2-x)_+^3 - 5x + 11$

### 参 考 文 献

- 1 李岳生. 样条与插值. 上海科技出版社, 1983

## A New Construction of Interpolation Natural Splines

*Hu Rizhang\**

**Abstract** A new construction of interpolation natural splines is developed, in which the matrix of coefficients is symmetric and the main diagonal elements of the matrix are mostly non-zero. This method has advantages of saving storages and maintaining stability in computation.

**keywords** natural spline, interpolation, minimization of function

---

\* Department of Computer Science