

# 螺旋流中扰动的传播

孙明光

梁永仪

(中山大学应用力学与工程系)

(佛山水泵厂)

**摘要** 讨论螺旋流的扰动传播,其周向流为强迫涡形式。结果显示,可能存在超临界与亚临界二种扰动,相对于轴向主流来说,它们分别有顺流或逆流的传播方向。

**关键词** 螺旋流,小扰动,特征值

水泵中的预旋是怎样产生的?有什么特性?这个问题曾引起很多争论,但至今没有很明确的答案<sup>[1,2]</sup>。本文企图研究水泵吸入管内螺旋流的扰动传播,说明叶轮产生的扰动可以向上下游两方向传播,肯定叶轮运动对预旋的产生有着重要的影响。

## 1 扰动方程的导出

我们从不可压无粘流体的基本运动方程出发,其柱坐标形式如下

$$\frac{\partial V_r}{\partial t} + \frac{1}{r} \frac{\partial V_\theta}{\partial \theta} + \frac{\partial V_z}{\partial z} + \frac{V_r}{r} = 0 \quad (1)$$

$$\frac{\partial V_r}{\partial t} + V_r \frac{\partial V_r}{\partial r} + \frac{V_\theta}{r} \frac{\partial V_r}{\partial \theta} + V_z \frac{\partial V_r}{\partial z} - \frac{V_\theta^2}{r} = F_r + \frac{1}{\rho} \frac{\partial P}{\partial r} \quad (2)$$

$$\frac{\partial V_\theta}{\partial t} + V_r \frac{\partial V_\theta}{\partial r} + \frac{V_\theta}{r} \frac{\partial V_\theta}{\partial \theta} + V_z \frac{\partial V_\theta}{\partial z} + \frac{V_r V_\theta}{r} = F_\theta - \frac{1}{\rho r} \frac{\partial P}{\partial \theta} \quad (3)$$

$$\frac{\partial V_z}{\partial t} + V_r \frac{\partial V_z}{\partial r} + \frac{V_\theta}{r} \frac{\partial V_z}{\partial \theta} + V_z \frac{\partial V_z}{\partial z} = F_z - \frac{1}{\rho} \frac{\partial P}{\partial z} \quad (4)$$

其中,  $t$  为时间;  $r, \theta, z$  为柱坐标;  $V_r, V_\theta, V_z$  分别为相应的径向、周向、轴向速度分量;  $P$  为压强;  $F_r, F_\theta, F_z$  为外力项, 以下假设  $F_r, F_\theta$  及  $F_z$  为零。

根据我们的试验观察(如图1), 或文[3], 假设流动的基本状态是: 在圆管半径  $r_0$  之内, 径向速度为零, 轴向速度  $U$  为常数, 切向速度为强迫涡形式  $V_\theta = \Omega r$ 。这里  $\Omega$  为主流旋转角速度, 压力分布相应为  $P_0 + \frac{1}{2} \rho \Omega^2 r^2$ 。

设有流动扰动  $v_r, v_\theta, v_z$  及  $p$  存在, 将  $(v_r, \Omega r + v_\theta, U + v_z, P_0 + \frac{1}{2} \rho \Omega^2 r^2 + p)$  代

入(1)~(4)式中的 $(V_r, V_\theta, V_z, P)$ , 并略去扰动量的高阶项, 仅保留一阶项, 则有

$$\frac{\partial v_r}{\partial r} + \frac{1}{r} \frac{\partial v_\theta}{\partial \theta} + \frac{\partial v_z}{\partial z} + \frac{v_r}{r} = 0 \quad (5)$$

$$\frac{\partial v_r}{\partial t} + \Omega \frac{\partial v_r}{\partial \theta} + U \frac{\partial v_r}{\partial z} - 2\Omega v_\theta = -\frac{1}{\rho} \frac{\partial p}{\partial r} \quad (6)$$

$$\frac{\partial v_\theta}{\partial t} + 2\Omega v_r + \Omega \frac{\partial v_\theta}{\partial \theta} + U \frac{\partial v_\theta}{\partial z} = -\frac{1}{\rho r} \frac{\partial p}{\partial \theta} \quad (7)$$

$$\frac{\partial v_z}{\partial t} + \Omega \frac{\partial v_z}{\partial \theta} + U \frac{\partial v_z}{\partial z} = -\frac{1}{\rho} \frac{\partial p}{\partial z} \quad (8)$$

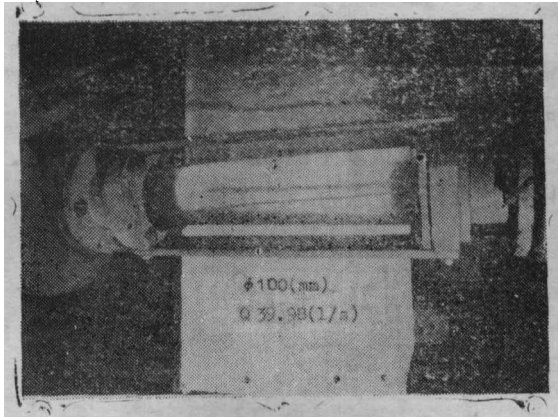


图1 水泵吸入管内螺旋流观察试验  
Fig.1 A Swirling-flow observation in the sucking pipe of a pump

现仅考虑如下形式的扰动

$$(v_r, v_\theta, v_z, p) = (\bar{v}_r(r), \bar{v}_\theta(r), \bar{v}_z(r), \bar{p}(r)) \exp[i(kz + m\theta - \omega t)] \quad (9)$$

其中,  $k$ 为扰动波数的轴向分量,  $\omega$ 为扰动圆频率,  $m$ 为扰动的周向波数。

将(9)代入(5)~(8)式, 得

$$\frac{\partial \bar{v}_r}{\partial r} + \frac{im}{r} \bar{v}_\theta + ik\bar{v}_z + \frac{\bar{v}_r}{r} = 0 \quad (10)$$

$$-i\omega \bar{v}_r + im\Omega \bar{v}_r + ikU \bar{v}_r - 2\Omega \bar{v}_\theta = -\frac{1}{\rho} \frac{d\bar{p}}{dr} \quad (11)$$

$$-i\omega \bar{v}_\theta + 2\Omega \bar{v}_r + im\Omega \bar{v}_\theta + ikU \bar{v}_\theta = -\frac{1}{\rho r} im\bar{p} \quad (12)$$

$$-im\bar{v}_z + im\Omega \bar{v}_z + ikU \bar{v}_z = -\frac{1}{\rho} ik\bar{p} \quad (13)$$

由(11)~(13)式可解出 $\bar{v}_r$ ,  $\bar{v}_\theta$ 及 $\bar{v}_z$ 如下

$$\bar{v}_r = \frac{1}{\lambda^2 - 4\Omega^2} \left[ \frac{i\lambda}{\rho} \frac{d\bar{p}}{dr} + \frac{2im\Omega}{\rho r} \bar{p} \right] \quad (14)$$

$$\bar{v}_\theta = \frac{-1}{\lambda^2 - 4\Omega^2} \left[ \frac{2\Omega d\bar{p}}{\rho} + \frac{\lambda m}{\rho r} \bar{p} \right] \quad (15)$$

$$\bar{v}_z = \frac{-1}{\lambda} \frac{k}{\rho} \bar{p} \quad (16)$$

$$\text{其中 } \lambda = kU + m\Omega - \omega \quad (17)$$

将(14)~(16)式代入(10)式, 得到关于 $\bar{p}$ 的特征值方程

$$\frac{d^2\bar{p}}{dr^2} + \frac{1}{r} \frac{d\bar{p}}{dr} + \left[ k^2 \left( \frac{4\Omega^2}{\lambda^2} - 1 \right) - \frac{m^2}{r^2} \right] \bar{p} = 0 \quad (18)$$

相应的边条件是

$$r = 0 \text{ 时, } \bar{p}(r) \text{ 有限} \quad (19)$$

$$r = r_0 \text{ 时, } \bar{v}_r(r) = 0 \text{ 或 } \frac{d\bar{p}}{dr} + \frac{2m\Omega}{r\lambda} \bar{p} = 0 \quad (20)$$

解出 $\bar{p}$ 之后, 由(14)~(16)可解出 $\bar{v}_r$ 、 $\bar{v}_\theta$ 及 $\bar{v}_z$ , 问题全部解决。

## 2 特征值问题的计算结果及讨论

当 $|\frac{\lambda}{\Omega}| < 2$ 时, 方程(18)的一般解为

$$\bar{p} = AJ_m(\mu r) + BN_m(\mu r)$$

其中,  $J_m$ 为第一类贝塞尔函数,  $N_m$ 为第二类贝塞尔函数,  $A$ 及 $B$ 为任意常数。由于 $N_m$ 不满足(19)式, 故必须舍去。所以, 特征函数 $\bar{p}$ 取为

$$\bar{p} = J_m(\mu r) \quad (21)$$

$$\text{其中 } \mu^2 = k^2 \left( \frac{4\Omega^2}{\lambda^2} - 1 \right) = \left( \frac{\Omega}{U} \right)^2 \left( 4 - \frac{\lambda^2}{\Omega^2} \right) \left( 1 + \frac{q}{\Omega} \frac{\Omega}{\lambda} \right)^2 \quad (22)$$

及  $q/\Omega = \omega/\Omega - m$ 。

类似的, 当 $|\frac{\lambda}{\Omega}| > 2$ 时,

$$\bar{p} = I_m(\mu' r) \quad (23)$$

$$\mu'^2 = k^2 \left( 1 - \frac{4\Omega^2}{\lambda^2} \right) = \left( \frac{\Omega}{U} \right)^2 \left( \frac{\lambda^2}{\Omega^2} - 4 \right) \left( 1 + \frac{q}{\Omega} \frac{\Omega}{\lambda} \right)^2 \quad (24)$$

其中 $I_m$ 为虚变量贝塞尔函数。

将(21)代入(20)得

$$\left. \frac{dJ_m(z)}{dz} \right|_{z=\mu r_0} + \frac{2m\Omega}{r_0\mu\lambda} J_m(\mu r_0) = 0 \quad (25)$$

$$\text{或 } \frac{\lambda}{\Omega} = - \frac{2m}{\mu r_0} \frac{J_m(z)}{dJ_m(z)/dz} \Big|_{z=\mu' r_0} \quad (26)$$

由上式, 可解出 $\frac{\lambda}{\Omega} \sim \mu r_0$  或  $\frac{\lambda}{\Omega} \sim \frac{q}{\Omega}$  关系, 其中必须注意到 $\mu$ 也是 $\frac{\lambda}{\Omega}$ 的函数。

类似的, 对 $|\frac{\lambda}{\Omega}| > 2$ 有

$$\frac{\lambda}{\Omega} = - \frac{2m}{\mu' r_0} \frac{I_m(z)}{dI_m(z)/dz} \Big|_{z=\mu' r_0} \quad (27)$$

但容易证明, 式(24)与(27)不存在有物理意义的解。

式(22)与(26)的计算结果, 如图2所示。对同一 $q/\Omega$ , 有无穷多 $\lambda/\Omega$ 相对应。

注意到无量纲扰动圆频率为 $\omega/\Omega$  (有量纲时为 $\omega$ ), 与 $q/\Omega$ 有如下关系 $\omega/\Omega = (q/\Omega) + m$ , 即 $q/\Omega$ 越大, 扰动频率越高,  $\omega/\Omega$ 越高。同时, 扰动的轴向传播相速度为 $C (= \omega/k)$ , 轴向流速 $U$ 与相速度 $C$ 之比为

$$\frac{U}{C} = \left( \frac{\lambda}{\Omega} + \frac{q}{\Omega} \right) \frac{\Omega}{\omega} = \left( \frac{\lambda}{\Omega} + \frac{q}{\Omega} \right) / \left( m + \frac{q}{\Omega} \right) \quad (28)$$

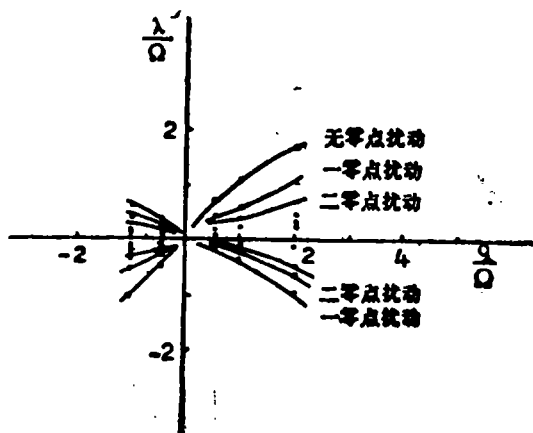


图2  $\lambda/\Omega$ 与 $q/\Omega$ 关系曲线例子  
(图中取 $m=1$ ,  $\Omega r_0/U=1$ )  
Fig.2 Relation between  $\lambda/\Omega$   
and  $q/\Omega$

由上式可知, 当 $q/\Omega \rightarrow \infty$ 时,  $U/C \rightarrow 1$ . 即极高频扰动的传播速度接近于流速。

考虑到(28)式, 由图2可以看出:

(i)  $q/\Omega > 0$ , 或扰动周向速度大于流体周向速度 $\omega > \Omega$ 时, 有 $U/C > 0$ , 即扰动顺流传播, 我们称为超临界扰动。但 $U/C$ 可以大于1或小于1, 即扰动传播速度可以小于流速或大于流速。越高阶振型扰动, 其传播速度越快。

(ii)  $q/\Omega < 0$ , 或扰动周向速度小于流体周向速度 $\omega < \Omega$ 时,  $U/C < 0$ , 即扰动反主流方向传播, 我们称为亚临界扰动。

(iii)  $q/\Omega = 0$ , 或扰动周向速度等于流体周向速度 $\omega = \Omega$ , 有 $U = 0$ , 流动变为纯平面旋转运动, 指定的三维扰动不传播。

同时, 由(22)式可以看出, 如 $\Omega r_0/U$ 很大, 则低阶振型可以不存在。

### 参 考 文 献

- 1 斯捷潘诺夫 A J. 泵与鼓风机、两相流。北京: 机械工业出版社, 1986. 79~86
- 2 阎庆斌等. 离心风机入口流体预旋的试验研究。流体工程, 1990, 12
- 3 斯捷潘诺夫 A J. 离心泵和轴流泵理论、设计和应用, 北京: 机械工业出版社, 1980. 13~17

## Disturbance Propagation in a Swirling Flow

Sun Mingguang\* Liang Yongyi

**Abstract** Disturbance propagation in a swirling flow is discussed. The tangential velocity-field is the form of the forced vortex. The results show that there exist two kinds of disturbances called sub- and super- disturbance respectively. Their propagating directions are the same as the axial flow, or adverse flow.

**Keywords** swirling flow, small disturbance, eigenvalue

\* Department of Applied Mechanics and Engineering, Zhongshan University