中山大学学报（自然科学版）
第31卷 第1期 ACTA SCIENTIARUM NATURALIUM Vol.31 №.1
1992年 UNIVERSITATIS SUNYATSENI 1992

在平面上椭圆型Monge-Ampère方程解的正则性

廖亮源

（中山大学孙文学院）

摘　要　应用Gampanato技巧及Sobolev空间理论，证明椭圆型Monge-Ampère方程（1）的解在区域Ω内部的$C^{2,\alpha}$（$0<\alpha<1$）类正则性，同时给出解的二阶导函数的Hölder估计。

关键词　Monge-Ampère方程，Sobolev空间，Campanato技巧，正则性定理

1　引言和变换引理

若$z(x,y)\epsilon C^2(\Omega)$是方程

$$Ar+2Bs+Ct+(rt-s^2)=E \tag{1}$$

的解，系数A、B、C和E满足同样的假设（A），文〔1〕证明解$z(x,y)$在Ω内部具有$C^{2,\alpha}$类的正则性，现在条件削弱，$z(x,y)\epsilon C^{1,1}(\Omega)$在$\Omega$中几乎处处满足方程（1），本文证明解$z(x,y)$在$\Omega$内部依然具有$C^{2,\alpha}$类的正则性。

文内沿用〔1〕中的符号及辅助结果，除非另外声明。

设Ω是$x-y$平面的一个属于（A）型[1]的有界开集，方程（1）的系数A,B,C，及E均为x,y,z,p,q的已知函数，且满足假设（A）：

Ai）A、B、C及E定义在超曲面

$$\Sigma=\{(x,y,z(x,y),p(x,y),q(x,y))\mid(x,y)\epsilon\Omega\}$$

上，且其绝对值不超过正常数a。

Aii）A、B、C及E满足Hölder连续条件：

$$|A(x',y',z',p',q')-A(x'',y'',z'',p'',q'')|\leqslant b[(x'-x'')^2+(y'-y'')^2]^{\alpha/2}$$

$$\vdots \tag{2}$$

$$|E(x',y',z',p',q')-E(x'',y'',z'',p'',q'')|\leqslant b[(x'-x'')^2+(y'-y'')^2]^{\alpha/2}$$

Aiii）（椭圆性）$\Delta=AC-B^2+E\geqslant c^{-1}>0$，$(x,y)\epsilon\Omega$ （3）

在上述的假设下证明

定理　如果$z(x,y)\epsilon c^{1,1}(\Omega)$在$\Omega$中几乎处处满足方程（1），而且$\|z\|_{c^{1,1}(\Omega)}\leqslant K$，函数$A(x,y,z,p,q)$，$B(x,y,z,p,q)$，$C(x,y,z,p,q)$及$E(x,y,z,p,q)$满足假设（$A$），那末，对于任意子集$\Omega_0\subset\subset\Omega$，均有$z(x,y)\epsilon C^{2,\alpha}(\Omega_0)$（$0<\alpha<1$），

本文1990年2月15日收到

而且r，s，t满足

$$|r(x',y')-r(x'',y'')|,\ \cdots,\ |t(x',y')-t(x'',y'')|$$
$$\leqslant H[(x'-x'')^2+(y'-y'')^2]^{\alpha/2}\qquad (x',y'),\ (x'',y'')\in\Omega_0 \tag{4}$$

式中，H是只与α，a，b，c，K和$\mathrm{dist}(\Omega_0,\partial\Omega)$有关的常数。

由于假设只给出$z(x,y)\in C^{1,1}(\Omega)$，它的二阶导数在$\Omega$中不一定处处存在，给定理的证明带来困难，为此应用Sobolev空间

$$W^{k,\infty}(\Omega)=\{u\in W^k(\Omega)\,|\,D^\alpha u\in L^\infty(\Omega),\ \forall|\alpha|\leqslant k\}$$

（k为非负整数）与Lipschitz空间关系：

$$C^{k-1,1}(\Omega)=W^{k,\infty}_{loc}(\Omega),\ C^{k-1,1}(\bar{\Omega})=W^{k,\infty}(\Omega).$$

这样，$z(x,y)\in C^{1,1}(\Omega)$的假设蕴涵着它的二阶导函数$r$，$s$，$t$在$\Omega$中几乎处处存在，$r$，$s$，$t\in L^\infty(\Omega')$（$\forall\Omega'\subset\subset\Omega$），而且它们的本质上确界不超过$K$，由于研究解的内部正则性；因此，依然将$\Omega'$记为$\Omega$，那么，$p$，$q\in W^{1,2}\cap L^\infty(\Omega)$，$r$，$s$，$t\in L^\infty(\Omega)$。

为证明定理，下面须将变换引理推广到$z(x,y)\in C^{1,1}(\Omega)$的情况中。

变换引理　设$z(x,y)\in C^{1,1}(\Omega)$在开圆盘$D=D_R(x_0,y_0)\subset\Omega$中几乎处处满足方程

$$rt-s^2=f(x,y) \tag{5}$$

此处$0<c^{-1}\leqslant f(x,y)\leqslant c<+\infty$，而且$z(x,y)$满足

$$\|z\|_{C^{1,1}(D)}\leqslant K \tag{6}$$
$$q=z_y(x,y)>0\qquad (x,y)\in D$$

则变换T：$u=x$，$v=q(x,y)$，$(x,y)\in D$有下列性质：

i）T将D同胚映上它的像集

$$B=T(D)=\{(u,v)\in\mathbf{R}^2,\ u=x,\ v=q(x,y),\ (x,y)\in D\}$$

ii）对任意(x',y')，$(x'',y'')\in D$，映射T满足伸缩不等式

$$(u'-u'')^2+(v'-v'')^2\leqslant\gamma_1^2((x'-x'')^2+(y'-y'')^2) \tag{7}$$

$$(x'-x'')^2+(y'-y'')^2\leqslant\gamma_2^2((u'-u'')^2+(v'-v'')^2) \tag{8}$$

式中，常数$\gamma_1=\gamma_1(K)\geqslant1$，$\gamma_2=\gamma_2(K,C)\geqslant1$，并且，$u'=u(x',y')$，…，$v''=v(x'',y'')$。

iii）函数$\tilde{z}(u,v)=z(x(u,v),y(u,v))\in C^{0,1}(B)\subset W^{1,2}\cap L^\infty(B)$是椭圆型方程

$$\tilde{z}_{uu}+(\tilde{f}\tilde{z}_v)_v-\frac{2\tilde{f}}{v}\tilde{z}_v=0 \tag{9}$$

的一个弱解，即对所有$\phi\in\mathring{W}^{1,2}\cap L^\infty(B)$，均有

$$\iint_B(\tilde{z}_u\phi_u+\tilde{f}\tilde{z}_v\phi_v)\,\mathrm{d}u\,\mathrm{d}v=-\iint_B\frac{2\tilde{f}}{v}\tilde{z}_v\phi\,\mathrm{d}u\mathrm{d}v \tag{10}$$

式中　$\tilde{f}=\tilde{f}(u,v)=f(x(u,v),y(u,v))$.

证明变换引理的方法与文献〔2〕中的证明相仿，只须对 ii）的证明稍作修改，在此从略。

2　定理的证明

证明分为以下3步

（Ⅰ）　设 $(x_0,\ y_0)\in\Omega$，令

$$A_0=A(x_0,\ y_0,\ z(x_0,\ y_0),\ p(x_0,\ y_0),\ q(x_0,\ y_0)),$$
$$\vdots$$
$$E_0=E(x_0,\ y_0,\ z(x_0,\ y_0),\ p(x_0,\ y_0),\ q(x_0,\ y_0)).$$

及 $\Delta_0=A_0C_0-B_0^2+E_0>0$，不难证明属于 $C^{1,1}(\Omega)$ 的函数

$$\hat{z}(x,\ y)=z(x,\ y)+\frac{1}{2}\{C_0(x-x_0)^2+A_0(y-y_0)^2-2B_0(x-x_0)(y-y_0)\}$$
$$+2(K+a)(y-y_0)$$

在 Ω 中几乎处处满足方程

$$\hat{r}\hat{t}-\hat{s}^2=\hat{f}(x,\ y) \tag{11}$$

此处　$\hat{r}=\hat{z}_{xx}=r+C_0$，$\hat{s}=\hat{z}_{xy}=s-B_0$，$\hat{t}=\hat{z}_{yy}=t+A_0$ 及

$$\hat{f}(x,y)=\Delta_0+\{(A_0-A)r+2(B_0-B)s+(C_0-C)t+(E-E_0)\} \tag{12}$$

类似〔2〕中所证，得

i)　对于 $(x-x_0)^2+(y-y_0)^2\leqslant 1$，$(x,y)\in\Omega$，$\hat{q}\geqslant K_0=1$，并且常数 $\hat{K}=\hat{K}(a,K)\geqslant 1$ 是函数 $\hat{z}(x,y)$ 的 $C^{1,1}$ 范数的界。

ii)　对于 $(x-x_0)^2+(y-y_0)^2\leqslant(10bcK)^{-2/\alpha}$，$(x,y)\in\Omega$，方程（11）是椭圆型，而且 $|\hat{r}|,|\hat{t}|\geqslant(c\hat{K})^{-1}$。

取 $R_0=\min\{(10bcK)^{-1/\alpha},d\}$，$d=\mathrm{dist}((x_0,y_0),\partial\Omega)$。应用变换引理于 $D_{R_0}(x_0,y_0)$，在变换 T

$$u=x,\ v=\hat{q}(x,\ y)=\partial\hat{z}(x,\ y)/\partial y \tag{13}$$

下 $(x_0,\ y_0)$ 的像点是 (u_0,v_0)，那么

$$T(D_{R/r_1}(x_0,\ y_0))\subset D_R(u_0,\ v_0),\ D_{R/r_2}(u_0,\ v_0)\subset T(D_R(x_0,\ y_0))$$

对于所有 R，$0<R\leqslant R_0$ 成立。而且函数 $\tilde{z}(u,\ v)=\hat{z}(x(u,\ v),\ y(u,\ v))$ $\in C^{0,1}(B)\subset W^{1,2}\cap L^\infty(D_{R/r_2}(u_0,\ v_0))$ 是方程

$$\tilde{z}_{uu}+(\tilde{f}\tilde{z}_v)_v-\frac{2\tilde{f}}{v}\tilde{z}_v=0 \tag{14}$$

的弱解。此处 $\tilde{f}(u,v)=\hat{f}(x(u,v),\ y(u,v))$。

（Ⅱ）　将（14）改写为

$$\tilde{z}_{uu}+\Delta_0\tilde{z}_{vv}=\frac{\partial}{\partial v}P(u,v)+Q(u,v) \tag{15}$$

式中　$P(u,v)=\{[(A-A_0)r+2(B-B_0)s+(C-C_0)t+(E_0-E)](x(u,v),y(u,v))\}$
$\cdot\tilde{z}_v(u,v)$

$Q(u,v)=2\tilde{f}\tilde{z}_v(u,v)/v$

由假设知$P(u,v)\epsilon L^{\infty}(D_{R/r_2}(u_0,v_0))$，$Q(u,v)\epsilon L^{\infty}(D_{R/r_2}(u_0,v_0))$及$|2\tilde{f}v^{-1}|\leqslant L=20a^2K$，且对于$\xi^2+\eta^2=1$，

$$C^{-2}\leqslant\xi^2+\varDelta_0\eta^2\leqslant(2a)^2 \qquad (16)$$

成立，因此方程(15)是椭圆型。令$\tilde{z}(u,v)=V(u,v)+W(u,v)$，式中$V(u,v)$是Dirichlet问题

$$\begin{cases} V_{uu}+\varDelta_0V_{vv}=0 \quad 在D_R(u_0,v_0)中 \\ V-\tilde{z}\epsilon\mathring{W}^{1,2}\cap L^{\infty}(D_R(u_0,v_0)) \end{cases} \qquad (17)$$

$(0<R\leqslant R_0/r_2)$的弱解，$(u_0,v_0)\epsilon\widetilde{\Omega}$，根据Lax—Milgram定理，问题(17)存在唯一的弱解$V(u,v)\epsilon W^{1,2}\cap L^{\infty}(D_R(u_0,v_0))$，并且由〔3〕知不等式

$$\iint_{D_\rho(u_0,v_0)}|\nabla V|^2\mathrm{d}u\mathrm{d}v\leqslant C\left(\frac{\rho}{R}\right)^2\iint_{D_R(u_0,v_0)}|\nabla V|^2\mathrm{d}u\mathrm{d}v \qquad (18)$$

$$\iint_{D_\rho(u_0,v_0)}|\nabla V-(\nabla V)_\rho|^2\mathrm{d}u\mathrm{d}v\leqslant C\left(\frac{\rho}{R}\right)^4\iint_{D_R(u_0,v_0)}|\nabla V-(\nabla V_R)|^2\mathrm{d}u\mathrm{d}v \qquad (19)$$

对所有ρ，$0<\rho<R\leqslant R_0/r_2$成立，而$W(u,v)\epsilon\mathring{W}^{1,2}\cap L^{\infty}(D_R(u_0,v_0))$是方程

$$W_{uu}+\varDelta_0W_{vv}=\frac{\partial}{\partial v}P(u,v)+Q(u,v) \qquad (20)$$

的弱解，即对于所有$\phi\epsilon\mathring{W}^{1,2}\cap L^{\infty}(D_R(u_0,v_0))$均有

$$\iint_{D_R(u_0,v_0)}(W_u\phi_u+\varDelta_0W_v\phi_v)\mathrm{d}u\mathrm{d}v=\iint_{D_R(u_0,v_0)}P\phi_v\mathrm{d}u\mathrm{d}v-\iint_{D_R(u_0,v_0)}Q\phi\mathrm{d}u\mathrm{d}v$$

取$\phi=W$，利用(16)，得

$$C^{-2}\iint_{D_R(u_0,v_0)}|\nabla W|^2\mathrm{d}u\mathrm{d}v\leqslant\iint_{D_R(u_0,v_0)}[|A-A_0||r|+2|B-B_0||s|+|C-C_0||t|$$

$$+|E_0-E|]|\nabla\tilde{z}|\nabla W|\mathrm{d}u\mathrm{d}v+L\iint_{D_R(u_0,v_0)}|\tilde{z}_vW|\mathrm{d}u\mathrm{d}v \qquad (21)$$

根据$ab\leqslant\varepsilon a^2+\varepsilon^{-1}b^2(\varepsilon>0)$及假设(Ⅰ)，得

$$\begin{aligned}&|A-A_0||r||\nabla\tilde{z}|\nabla W|,\ \cdots,\ |E-E_0||\nabla\tilde{z}||\nabla W|\\&\leqslant\varepsilon^{-1}b^2R^{2\alpha}K^2|\nabla\tilde{z}|^2+\varepsilon|\nabla W|^2\end{aligned} \qquad (22)$$

应用Poincare不等式[1]及Schwarz不等式，得

$$\iint_{D_R(u_0,v_0)}|\tilde{z}_vW|\mathrm{d}u\mathrm{d}v\leqslant2\sigma\left\{\frac{R^2}{\varepsilon}\iint_{D_R(u_0,v_0)}|\nabla\tilde{z}|^2\mathrm{d}u\mathrm{d}v\right.$$

$$\left.+\varepsilon\iint_{D_R(u_0,v_0)}|\nabla W|^2\mathrm{d}u\mathrm{d}v\right\} \qquad (23)$$

将(22)，(23)代入(21)，选取适当$\varepsilon>0$，得

$$\iint_{D_R(u_0,v_0)} |\nabla W|^2 \mathrm{d}u\mathrm{d}v \leqslant C\left\{ R^{2\alpha} \iint_{D_R(u_0,v_0)} |\nabla \tilde{z}|^2 \mathrm{d}u\mathrm{d}v + R^2 \iint_{D_R(u_0,v_0)} |\nabla \tilde{z}|^2 \mathrm{d}u\mathrm{d}v \right\} \tag{24}$$

式中，$C=C(a,\ b,\ c,\ \sigma,\ K)$。结合（18）和（19），得

$$\iint_{D_\rho(u_0,v_0)} |\nabla \tilde{z}|^2 \mathrm{d}u\mathrm{d}v \leqslant C_1 \left(\frac{\rho}{R}\right)^2 \iint_{D_R(u_0,v_0)} |\nabla \tilde{z}|^2 \mathrm{d}u\mathrm{d}v + C_2\left\{ R^{2\alpha} \iint_{D_R(u_0,v_0)} |\nabla \tilde{z}|^2 \mathrm{d}u\mathrm{d}v + R^2 \iint_{D_R(u_0,v_0)} |\nabla \tilde{z}|^2 \mathrm{d}u\mathrm{d}v \right\} \tag{25}$$

$$\iint_{D_\rho(u_0,v_0)} |\nabla \tilde{z} - (\nabla \tilde{z})_\rho|^2 \mathrm{d}u\mathrm{d}v \leqslant C_1 \left(\frac{\rho}{R}\right)^4 \iint_{D_R(u_0,v_0)} |\nabla \tilde{z} - (\nabla \tilde{z})_R|^2 \mathrm{d}u\mathrm{d}v + C_2\left\{ R^{2\alpha} \iint_{D_R(u_0,v_0)} |\nabla \tilde{z}|^2 \mathrm{d}u\mathrm{d}v + R^2 \iint_{D_R(u_0,v_0)} |\nabla \tilde{z}|^2 \mathrm{d}u\mathrm{d}v \right\} \tag{26}$$

此处C_1和C_2是与a、b、c、σ、K有关的常数。

（Ⅱ）设Ω_0是Ω的任一严格内子集，如果Ω_0，Ω经过同胚映射T对应的像集分别是$\widetilde{\Omega}_0$，$\widetilde{\Omega}$。记$m=\operatorname{dist}(\widetilde{\Omega}_0,\partial\widetilde{\Omega})$，构造紧子集$\widetilde{\Omega}_1$：$\widetilde{\Omega}_0 \subset\subset \widetilde{\Omega}_1 \subset\subset \widetilde{\Omega}$，使得$\operatorname{dist}(\widetilde{\Omega}_1,\partial\widetilde{\Omega})=\frac{m}{2}$，从(25)式出发，用〔1〕的方法证得$\nabla \tilde{z}(u,\ v)\in L^{2,2}(\widetilde{\Omega}_1)$，而且

$$\|\nabla \tilde{z}\|^2_{L^{2,2}(\widetilde{\Omega}_1)} \leqslant C\left(\|\nabla \tilde{z}\|^2_{L^2(\widetilde{\Omega})} + \|\nabla \tilde{z}\|^2_{L^{2,2-2\alpha}(\widetilde{\Omega})}\right) \tag{27}$$

此处常数C仅依赖于a、b、c、α、σ、K及m。显然，由$\nabla \tilde{z}\in L^{2,2}(\widetilde{\Omega}_1)$知$\nabla \tilde{z}\in L^{2,2\alpha}(\widetilde{\Omega}_1)$（$0<\alpha<1$），由（26）获得

$$\iint_{D_\rho(u_0,v_0)} |\nabla \tilde{z} - (\nabla \tilde{z})_\rho|^2 \mathrm{d}u\mathrm{d}v \leqslant C_1 \left(\frac{\rho}{R}\right)^4 \iint_{D_R(u_0,v_0)} |\nabla \tilde{z} - (\nabla \tilde{z})_R|^2 \mathrm{d}u\mathrm{d}v + C_2 R^{2+2\alpha}\left(\|\nabla \tilde{z}\|^2_{L^{2,2}(\widetilde{\Omega}_1)} + \|\nabla \tilde{z}\|^2_{L^{2,2\alpha}(\widetilde{\Omega}_1)}\right)$$

应用〔1〕中引理1，推出不等式

$$\frac{1}{\rho^{2+2\alpha}} \iint_{\widetilde{\Omega}_0 \cap D_\rho(u_0,v_0)} |\nabla \tilde{z} - (\nabla \tilde{z})_\rho|^2 \mathrm{d}u\mathrm{d}v \leqslant \frac{1}{\rho^{2+2\alpha}} \iint_{D_\rho(u_0,v_0)} |\nabla \tilde{z} - (\nabla \tilde{z})_\rho|^2 \mathrm{d}u\mathrm{d}v$$
$$\leqslant C_3\left\{ \frac{1}{R^{2+2\alpha}} \iint_{D_R(u_0,v_0)} |\nabla \tilde{z} - (\nabla \tilde{z})_R|^2 \mathrm{d}u\mathrm{d}v + \|\nabla \tilde{z}\|^2_{L^{2,2}(\widetilde{\Omega}_1)} + \|\nabla \tilde{z}\|^2_{L^{2,2\alpha}(\widetilde{\Omega}_1)} \right\}$$

对所有ρ，$0<\rho<R\leqslant\min\left(R_0/\gamma_2,\ \frac{m}{2}\right)$及$(u_0,\ v_0)\in\widetilde{\Omega}_0$成立，注意到

$$\iint_{D_R(u_0,v_0)} |\nabla\tilde{z}-(\nabla\tilde{z})_R|^2 du dv \leqslant \|\nabla\tilde{z}\|^2_{L^2(\tilde{\Omega})}, \quad \|\nabla\tilde{z}\|^2_{L^{2,2}(\tilde{\Omega}_1)}$$

$$\leqslant \|\nabla\tilde{z}\|^2_{L^{2,2}(\tilde{\Omega})} \text{ 及 } \|\nabla\tilde{z}\|^2_{L^{2,2\alpha}(\tilde{\Omega}_1)} \leqslant \|\nabla\tilde{z}\|^2_{L^{2,2\alpha}(\tilde{\Omega})}, \text{ 得}$$

$$[\nabla\tilde{z}]^2_{L^{2,2+2\alpha}(\tilde{\Omega}_0)} = \sup_{\substack{(u_0,v_0)\in\tilde{\Omega}_0 \\ 0<\rho<\operatorname{diam}\tilde{\Omega}_0}} \frac{1}{\rho^{2+2\alpha}} \iint_{\tilde{\Omega}_0\cap D_\rho(u_0,v_0)} |\nabla\tilde{z}-(\nabla\tilde{z})_\rho|^2 du dv$$

$$\leqslant C_4(m,a,b,c,a,\sigma,K)[\|\nabla\tilde{z}\|^2_{L^2(\tilde{\Omega})} + \|\nabla\tilde{z}\|^2_{L^{2,2}(\tilde{\Omega})} + \|\nabla\tilde{z}\|^2_{L^{2,2\alpha}(\tilde{\Omega})}]$$

从而获得 $\|\nabla\tilde{z}\|^2_{L^{2,2+2\alpha}(\tilde{\Omega}_0)} \leqslant C_5[\|\nabla\tilde{z}\|^2_{L^2(\tilde{\Omega})} + \|\nabla\tilde{z}\|^2_{L^{2,2}(\tilde{\Omega})} + \|\nabla\tilde{z}\|^2_{L^{2,2\alpha}(\tilde{\Omega})}]$

式中常数C_5仅依赖于a，b，c，α，σ，K和dist$(\tilde{\Omega}_0,\partial\tilde{\Omega})$。因此，$\nabla\tilde{z}(u,v)\in L^{2,2+2\alpha}(\tilde{\Omega}_0)$（$0<\alpha<1$）。由于在同胚映射$T$下，(A)型域$\Omega$的像$\tilde{\Omega}$也是(A)型域，根据[1]中定理2知$\nabla\tilde{z}(u,v)\in C^{0,\alpha}(\tilde{\Omega}_0)$，即$\tilde{z}(u,v)\in C^{1,\alpha}(\tilde{\Omega}_0)$，从而推知方程(1)的解$z(x,y)\in C^{2,\alpha}(\Omega_0)$对所有子集$\Omega_0\subset\subset\Omega$成立。再直接引用[2]中的定理，获得关于$z(x,y)$的二阶导函数的先验估计，而$r$，$s$，$t$满足不等式(5)，定理证毕。

参考文献

1 廖亮源．西南交通大学学报，1987，(2)：60～70

2 Schulz F. A Priori Estimates for Solutions of Monge-Ampère Equations. Archive for Rational Mechanics and Analysis, 1985, 89(2)：123～133

3 Giaquinta M. Multiple Integrals in the Calculus of Variations and Nonlinear Elliptic Systems.(Annals of Mathematics Studies (105). Princeton University Press.

Interior Regularity for Solutions of Elliptic Monge-Ampère Equations on the Plane

*Liao Liangyuan**

Abstract Under suitable assumpations, it is proved that if $z(x,y)\in C^{1,1}(\Omega)$ satisfies the elliptic Monge-Ampère Equation (1) almost everywhere in Ω, then the solution $z(x,y)$ possesses $C^{2,\alpha}$ ($0<\alpha<1$) regularity in the interior of the domain Ω, namely that for all $\Omega_0\subset\subset\Omega$, $z(x,y)\in C^{2,\alpha}(\tilde{\Omega}_0)$. Furthermore, the Hölder estimate for the second partial derivatives of $z(x,y)$ is obtained.

Keywords Monge-Ampère equations, Sobolev's space, Campanato's technique, regularity theorem

* Sunwen College