

一种变步长LMS自适应算法

陈 钧 量

(无线电电子学系)

摘 要

本文提出一种步长自适应于绝对误差和的最小均方(LMS)自适应算法。给出收敛条件和精度比值。新算法对平稳和非平稳输入信号的权噪声功率,及系统的跟踪能力都明显地优于一般的LMS自适应算法。并给出计算机模拟结果。

关键词 自适应滤波器, LMS自适应算法, 权噪声功率

自适应滤波器具有跟踪时变输入统计能力的突出优点,可用于通信、控制、雷达、地震学、图象处理和模式识别等领域。Widrow-Hoff LMS自适应算法^[1],因其简单性和在某些应用中的顽健性,近十多年来得到广泛采用^[2]。但这种固定步长LMS算法,在性能方面存在着收敛速度与精度的矛盾。1986年R. W. Harris等首先提出一种可变步长对角矩阵LMS自适应算法^[3],同时期, W. B. Mikhael等提出单独最优步长LMS自适应算法^[4],两年后,蒋旭东等提出一种步长自适应于算法收敛过程的LMS算法^[5]。在平稳输入信号情况下,这些变步长LMS算法的收敛速度或失调量都优于一般LMS算法。本文提出一种步长自适应于绝对误差和的LMS算法,讨论新算法的收敛情况和精度,给出新算法在平稳和非平稳输入信号时学习曲线和跟踪特性的模拟结果。

1 变步长LMS自适应算法

图1为系统模拟框图。在j时刻模拟系统的误差e_j为

$$e_j = d_j - W_j^T X_j = n_j + (W^*)^T X_j - W_j^T X_j = n_j - V_j^T X_j \quad (1)$$

其中, $X_j = (x_j, x_{j-1}, \dots, x_{j-n+1})^T$,

$$W_j = (w_{1j}, w_{2j}, \dots, w_{nj})^T,$$

$$W^* = (w_1^*, w_2^*, \dots, w_n^*)^T, \quad V_j = W_j - W^*.$$

自适应算法权向量迭代公式为

$$W_{j+1} = W_j - \mu \nabla J \quad (2)$$

∇J 为误差函数的梯度。在一般LMS自适应算法中有^[1]

$$W_{j+1} = W_j + 2\mu e_j X_j \quad (3)$$

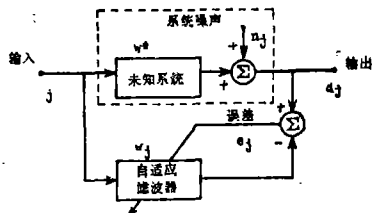


图1 自适应仿模系统框图
Fig. 1 Block diagram of adaptive plant modeling

式中 μ 为步长常数。权系数 w_j 的衰减时间常数为(对第 p 个特征模而言)

$$\tau_p = 1/2\mu\lambda_p \quad p = 1, 2, \dots, n \quad (4)$$

式中 λ_p 是输入信号向量自相关矩阵的第 p 个特征值。变步长 μ_j 取下式

$$\mu_j = k \sum_{i=0}^m |e_{j-i}| \quad (5)$$

式中 k 为常数,用来保证算法收敛。 m 为参数,它将影响算法的收敛性能。

将式(5)代入式(3)得

$$W_{j+1} = W_j + 2k \sum_{i=0}^m |e_{j-i}| e_j X_j \quad (6)$$

式(6)可写为

$$\begin{aligned} V_{j+1} &= V_j + 2k(|e_j| + \sum_{i=1}^m |e_{j-i}|) e_j X_j \\ &= V_j + 2k \operatorname{sgn} e_j \cdot e_j^2 X_j + 2k \sum_{i=1}^m \operatorname{sgn} e_{j-i} (e_{j-i} e_j) X_j \end{aligned} \quad (7)$$

其中, $\operatorname{sgn} e_j = \begin{cases} 1, & e_j > 0 \\ -1, & e_j < 0 \end{cases}$

1.1 收敛条件

假设: ① n_j 与 x_j 不相关, 这样, v_j 与 n_j 也不相关。②各 x_j 互不相关, 则 x_j 与 v_j 也不相关。③ x_j 相对于 n_j 缓慢变化, 对于 $k \ll 1$ 时, $V_j^T X_j \approx V_{j-1}^T X_{j-1} \approx \dots \approx V_{j-m}^T X_{j-m}$ 和

$$\sum_{i=1}^m n_{j-i} \approx 0.$$

在收敛的平衡点附近有 $V_j \approx 0$, 可将式(7)误差乘方的展式中之 V_j 高次项略去, 并计及上面假设, 由式(7)得

$$\begin{aligned} V_{j+1} &= V_j + 2k \operatorname{sgn} e_j \cdot X_j (n_j^2 - 2n_j X_j^T V_j) + 2k X_j \sum_{i=1}^m \operatorname{sgn} e_{j-i} (e_{j-i} \cdot e_j) \\ &= V_j + 2k \operatorname{sgn} e_j \cdot X_j (n_j^2 - 2n_j X_j^T V_j) - 2k \operatorname{sgn} e_{j-i} \cdot n_{j-m} X_j X_j^T V_j \end{aligned} \quad (8)$$

设 $E[X_j] = 0$, e_j 与 n_j 恒为同号, 故 $\operatorname{sgn} e_j \cdot n_j = |n_j|$ 。并设在平衡点附近有

$$\operatorname{sgn} e_{j-i} = \operatorname{sgn} e_j, \quad i = 1, 2, \dots, m$$

则 $\operatorname{sgn} e_{j-i} \cdot n_j = |n_j|$, 令 $E[|n_j|] = C$, C 为正数。对式(8)取期望得

$$\begin{aligned} E[V_{j+1}] &= E[V_j] - 4k C R E[V_j] - 2k C m R E[V_j] \\ &= [I - 2k(2+m)CR] E[V_j] \end{aligned} \quad (9)$$

式中 I 为单位矩阵和 $R = E[X_j X_j^T]$ 为输入信号向量的自相关矩阵。

从式(9)求得权系数收敛时间常数

$$\tau_p^{-1} = 1/[2k(m+2)C\lambda_p], \quad p = 1, 2, \dots, n \quad (10)$$

应当指出, m 通常只能是一个较小的有限值, 它的最佳值与输入信号和信噪比有关, 或者说, m 值大小应按具体应用来选择。

设 R 为正定矩阵, 为满足算法的收敛性($\lim_{j \rightarrow \infty} E[V_{j+1}] = 0$), 则可证明收敛条件为

$$0 < k < 1 / [2(m+2)C\lambda_{\max}] \quad (11)$$

式中 λ_{\max} 为 R 之最大特征值。利用

$$t_r[R] = \sum_{i=1}^n E[x_i^2] = \sum_{i=1}^n \lambda_i > \lambda_{\max}, \text{ 式(11) 写为}$$

$$0 < k \leq 1 / (2(m+2)CnE[x_i^2]) \quad (12)$$

由式(12)选取 k 值。

1.2 精度比值

平衡时, $\nabla_j = -2k(|e_j| + \sum_{i=1}^m |e_{j-i}|)e_j X_j = 0$ 。即

$$\text{sgn}e_j \cdot e_j^2 X_j + \sum_{i=1}^m \text{sgn}e_{j-i}(e_{j-i} \cdot e_j) X_j = 0 \quad (13)$$

利用前面假设条件, 式(13)经运算得

$$\text{sgn}e_j (n_j^2 - 2n_j X_j^T V_B) X_j - \text{sgn}e_j n_j m X_j^T V_B X_j = 0$$

式中 V_B 表示平衡时的权系数误差向量, 由上式得

$$\sum_{j=1}^N \text{sgn}e_j n_j^2 X_j = \sum_{j=1}^N (m+2) \text{sgn}e_j n_j X_j^T V_B X_j \quad (14)$$

式(14)可写为

$$V_B = R_B^{-1} P_B \quad (15)$$

其中, $P_B = \frac{1}{N} \sum_{j=1}^N \text{sgn}e_j n_j^2 X_j$, $R_B = \frac{1}{N} \sum_{j=1}^N (m+2) |n_j| X_j X_j^T$ 。

当 N 很大时, 可认为 $R_B = E[R_B]$, 此时 $R_B = (m+2)E|n_j|R$, 而 $E[P_B] = 0$, 故 $E[V_B] = 0$ 。可见, 新算法对权系数的估计仍是无偏的。

由式(15)得权系数误差向量之方差为

$$E[V_B V_B^T] = E[R_B^{-1} P_B P_B^T R_B^{-1}] \quad (16)$$

但是, $E[P_B P_B^T] = E[n_j^4]R$, 将 R_B 和上式代入式(16)得

$$\begin{aligned} E[V_B V_B^T] &= [1/(m+2)^2 (E|n_j|)^2] R^{-1} E[P_B P_B^T] R^{-1} \\ &= [E[n_j^4]/(m+2)^2 (E|n_j|)^2] R^{-1} \end{aligned} \quad (17)$$

一般LMS算法的权系数误差向量之方差为^[6]

$$E[V_B V_B^T]_{LMS} = E[n_j^2] R^{-1} \quad (18)$$

我们定义新算法的精度比值为

$$\alpha(m) \triangleq \frac{E[V_B V_B^T]_{LMS}}{E[V_B V_B^T]_{VLMS}} = \frac{(m+2)^2 (E|n_j|)^2 E[n_j^2]}{E[n_j^4]} \quad (19)$$

可见, $\alpha(m)$ 越大, 新算法(VLMS)比一般LMS算法越好。换句话说, 新算法的失调量比一般LMS算法小, 但 m 值实际上是有限制的。表 1 为不同噪声分布时的 $\alpha(m)$ 值。

表 1 不同噪声分布时的 $\alpha(m)$ 值
Tab. 1 Values of $\alpha(m)$ for several probability densities for plant noise n_j

m	高斯白噪声	均匀分布噪声	方波干扰
0	0.82027	1.64989	4
1	1.84562	3.71225	9
2	3.28109	6.59956	16
4	7.38246	14.84900	36
6	13.12438	26.39822	64
8	20.50684	41.24722	100

由式(5)可得

$$\begin{aligned} \mu_{j+1} &= k \sum_{i=0}^m |e_{j+1-i}| = k \left(\sum_{i=0}^m |e_{j-i}| + |e_{j+1}| - |e_{j-m}| \right) \\ &= k \sum_{i=0}^m |e_{j-i}| + k|e_{j+1}| - k|e_{j-m}| = \mu_j + k(|e_{j+1}| - |e_{j-m}|) \end{aligned} \quad (20)$$

从式(20)可知, 新算法每次迭代比较一般LMS算法只增加一次乘法和两次加法, 即新算法的计算量接近LMS算法。

2 计算机模拟结果

2.1 平稳输入信号权误差功率曲线

采用图 1 仿模系统, 输入是平稳正弦信号, 周期为 20, 未知系统是 9 阶固定参数的横向滤波器, 附加噪声是随机噪声, 信噪比为 12dB。对 VLMS 算法取 $m=8$ 和 $k=0.002$, 对一般 LMS 算法取 $\mu=0.006$ 。图 2 给出两种算法的权误差功率与迭代次数曲线, 每条曲线用 6 个样本序列输入集合平均而成。从该图看出, 两种算法具有相近收敛速度, 但 VLMS 算法的权噪声功率比 LMS 算法小 7dB, 即降低了失调量。

2.2 非平稳输入信号权误差功率曲线

仍采用图 1 仿模系统, 未知系统用 9 阶横向 FIR 滤波器, 输入信号是非平稳窄带信

号，采样频率为1Hz，主频取0.05Hz，即 $T = 20$ ，窄带非平稳信号为^[7]：

$$x_j = \sin[j(2\pi/T) + (2\pi/200) \cdot \text{Mod}(j/T)] + \text{随机噪声}$$

其中 j 是时间序数，由 $\text{Mod}(\cdot)$ 产生 j/T 的余数函数，信噪比为 6 dB，取300个样本点。

对VLMS 算法取 $m = 8$ 和 $k = 0.001$ ，对LMS算法取 $\mu = 0.005$ 。图 3 给出两种算法的学习曲线，每条曲线均取 6 次集合平均。可见，VLMS算法的最小权误差功率较 LMS 算法小约5dB。

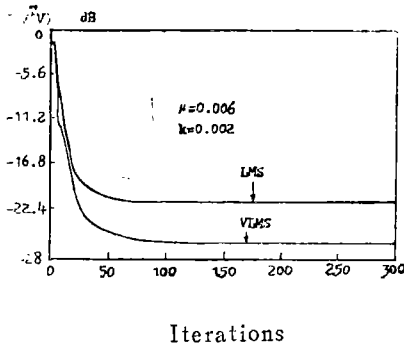


图 2 平稳输入情况的VLMS和LMS 算法的学习曲线

Fig. 2 Learning curves for LMS and VLMS algorithms with stationary input

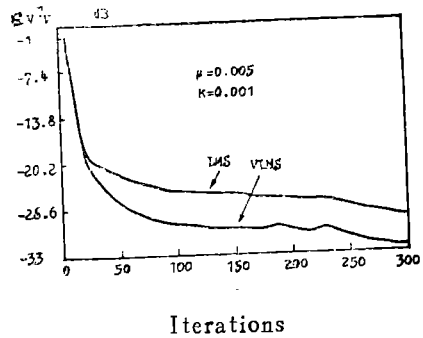


图 3 非平稳输入的VLMS和LMS 算法的权噪声功率学习曲线

Fig. 3 Learning curves for LMS and VLMS algorithms with nonstationary input

2.3 非平稳遍历环境下VLMS算法的跟踪特性

我们采用文献 [1] 中图 7 和图 8 仿模方案，即用VLMS自适应滤波器仿模或识别一个未知时变系统。未知装置是一个 4 阶延迟横向滤波器，其权参数变化为^[8]：①幅度为2的正弦变化；②从0到2的线性变化；③从0到2的阶跃变化；④记忆常数为0.99的一阶Markov过程。

在这 4 种模拟实验中，输入信号 x_j 是独立随机的值为 -1 和 1 的信号，二值具有同等概率，附加的噪声序列是零均值的白噪声，其方差使信噪比为12dB。系统④中每一个抽头增益均由独立 Markov过程产生，系统①、②和③的抽头增益均随时间相同变化。4 个实验的抽头增益的初始值均取零，横向自适应滤波器为 4 阶。对两种算法分别选择 $m = 8$ ， $k = 0.001$ 和 $\mu = 0.001$ 作了模拟实验。图 4 至图 6 给出了对应测试权①和④的模拟结果，为节省篇幅，没有给出测试权②和③的模拟结果。从这些图可知，新算法 (VLMS) 的跟踪性能比一般LMS 算法要

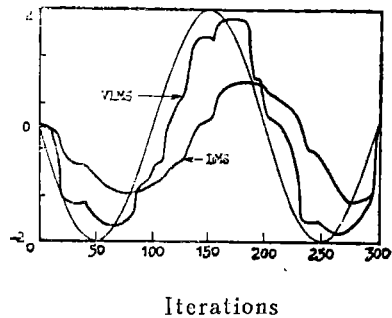


图 4 VLMS和LMS跟踪曲线(w_{jj-n})
Fig. 4 Tracking curves for VLMS and LMS algorithms

好得多。

实验结果表明,适当加大LMS算法步长 μ 值,可改进其跟踪性能,但通常会出现更大的估计噪声,即有较大的失调量。

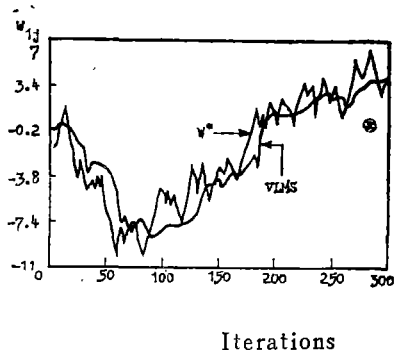


图5 VLMS跟踪曲线

Fig. 5 Tracking curve for VLMS algorithm

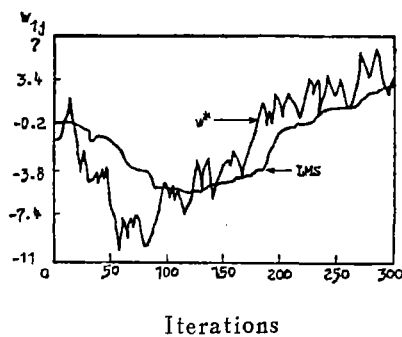


图6 LMS跟踪曲线

Fig. 6 Tracking curve for LMS algorithm

3 结论

本文提出一种步长自适应于绝对误差平均的LMS算法。给出了新算法的收敛条件和精度比值。由于步长按绝对误差平均取值,对输入突发性干扰有较强的抗御能力,对有用的输入信号则有较好的跟踪能力。新算法基本保持一般LMS算法的简单性,而收敛性能和跟踪能力都较一般LMS算法优越,新算法更适用于非平稳输入信号的情况。最后,给出了计算机模拟结果。

李坚协助完成计算机模拟工作,特此致谢。

参 考 文 献

- [1] Widrow B et al., *Proc. of IEEE*, 64(1976), 1151
- [2] Widrow B et al., *Adaptive Signal Processing*, Prentice-Hall, 1985
- [3] Harris R W et al., *IEEE Trans. ASSP*, ASSP-34(1986), 309
- [4] Mikhael W B et al., *IEEE Trans. CAS*, CAS-33(1986), 677
- [5] 蒋旭东等, *电子学报*, 16(1988), 2, 85
- [6] 阎平凡, *清华大学学报(自然科学版)*, 29(1989), 4, 86
- [7] Chen J et al., *Proceedings of 1988 IEEE ISCAS*, June 1988, 771
- [8] Kwong C P, *ibid.*, 519

A Variable Step LMS Adaptive Algorithm

*Chen Junliang**

Abstract

A variable step LMS adaptive algorithm which varies its step size adaptively to the sum of absolute error is proposed. The condition of convergence and the ratio of accuracy of the new algorithm are presented. The noise power of the adaptive weights and the tracking capability of the new algorithm are evidently superior to the conventional LMS algorithm both in stationary and nonstationary inputs. Also, the computer simulation results are given.

Keywords: adaptive filter, LMS adaptive algorithm, weight noise power

* Department of Radio and Electronics