中山大学学报（自然科学版）
第29卷 第1期 ACTA SCIENTIARUM NATURALIUM Vol.29 №.1
1990年 UNIVERSITATIS SUNYATSENI 1990

多维门限自回归模型参数估计的强相容性*

宋心远 邓集贤
（数学系）

摘 要

对多维门限自回归模型在给定阶数、门限及延迟参数的假定下，通过研究模型所构成的Markov 链的遍历性，得到了自回归系数及白噪声协方差阵最小二乘方估计的强相容性。

关键词 门限自回归，相容性，遍历性

1 模型的基本假设及其Markov性和遍历性

考虑k维门限自回归模型：

$$Z_t=\sum_{j=1}^{p}A_j^{(i)}Z_{t-j}+\varepsilon_t^{(i)}\qquad 当 Z_{t-d}\in R_i^k\qquad i=1,\cdots,l,\ t=1,2,\cdots \tag{1}$$

其中$\{R_i^k,\ i=1,\cdots,l\}$是k维欧氏空间R^k的一个剖分，参数p,d,l均假定为已知，系数矩阵$A_j^{(i)}=(a_j^{(i)}(m,n))_{k\times k}$，$a_j^{(i)}(m,n)$为未知常数，$Z_t=(Z_t(s))_{1\times k}$，$\varepsilon_t^{(i)}=(\varepsilon_t^{(i)}(s))_{1\times k}$

对于k维白噪声序列$\{\varepsilon_t^{(i)}\}$，我们假定

(i) $\{\varepsilon_t^{(i)},\ 1\leqslant i\leqslant l,\quad t\geqslant 1\}$独立；

(ii) $\varepsilon_t^{(i)}$有k元正的概率密度函数$f(\cdot)$；

(iii) $E\varepsilon_t^{(i)}=0,\qquad E\varepsilon_t^{(i)}\ \varepsilon_t^{(i)\prime}=G>0,\qquad (G=(r_{mn})_{k\times k})$；

(iv) $\{\varepsilon_t^{(i)},\ t\geqslant s,\ 1\leqslant i\leqslant l\}$与$\{Z_r,\ r<s\}$独立。

令 $\mathbf{Z}_t=(Z_{t-p},\ Z_{t-p+1},\cdots,Z_{t-1})$； $\mathbf{E}_t=(\varepsilon_t^{(1)},\ \varepsilon_t^{(2)},\ \cdots,\ \varepsilon_t^{(l)})$。

则$\mathbf{Z}_t$，$\mathbf{E}_t$分别为$k\times p$及$k\times l$阶矩阵，由(1)有

$$\mathbf{Z}_{t+1}=\mathbf{Z}_tB+\sum_{i=1}^{l}\left[\sum_{j=1}^{p}A_j^{(i)}(\mathbf{Z}_tC_j)+\mathbf{E}_tD_i\right]\chi_{\{Z_{t-d}\in R_i^k\}}\hat{=}h(\mathbf{Z}_t,\mathbf{E}_t) \tag{2}$$

其中
$$B=\begin{pmatrix}0&0&\cdot&0&0\\1&0&\cdot&0&0\\0&1&\cdot&0&0\\\vdots&\vdots&\cdot&\vdots&\vdots\\0&0&\cdot&1&0\end{pmatrix}_{p\times p}$$

本文1988年11月28日收到
● 国家教委博士点基金资助项目

$$C_j=\begin{pmatrix} & \mathbf{0} & & \\ 0 & \cdots & 0 & 1 \\ & \mathbf{0} & & \end{pmatrix}\to 第p-j+1行, \quad D_i=\begin{pmatrix} & \mathbf{0} & & \\ 0 & \cdots & 0 & 1 \\ & \mathbf{0} & & \end{pmatrix}\to 第i行$$

于是，对任意的正整数m，经m次叠代后得

$$\mathbf{Z}_{t+m}=h_m(\mathbf{Z}_t,\ \mathbf{E}_{t+m-1},\ \mathbf{E}_{t+m-2},\cdots,\mathbf{E}_t) \tag{3}$$

显然，上述之$h(\cdot)$，$h_m(\cdot)$是可测变换。

设$\mathscr{X}$为一切$k\times p$阶实矩阵所成的集合，$\mathscr{F}$为$\mathscr{X}$的一个σ-代数。

性质 1 $\{\mathbf{Z}_t\}$为$\mathscr{X}$上具有平稳转移概率的Markov链。

证明 对任意的整数m，t_1，$t_2\cdots$，t_r满足$1\leqslant t_1<t_2<\cdots<t_r<t$ 及任意$A\in\mathscr{F}$和常数矩阵$\mathbf{X}_0$，$\mathbf{X}_1$，$\cdots$，$\mathbf{X}_r\in\mathscr{X}$，由假设有

$$\begin{aligned}&P\{\mathbf{Z}_{t+m}\in A/\mathbf{Z}_t=\mathbf{X}_0,\ \mathbf{Z}_{t_r}=\mathbf{X}_r,\ \cdots,\ \mathbf{Z}_{t_1}=\mathbf{X}_1\}\\&=P\{h_m(\mathbf{Z}_t,\ \mathbf{E}_{t+m-1},\cdots,\mathbf{E}_t)\in A/\mathbf{Z}_t=\mathbf{X}_0,\ \mathbf{Z}_{t_r}=\mathbf{X}_r,\cdots,\mathbf{Z}_{t_1}=\mathbf{X}_1\}\\&=P\{h_m(\mathbf{X}_0,\mathbf{E}_{t+m-1},\cdots,\mathbf{E}_t)\in A/\mathbf{Z}_t=\mathbf{X}_0\}\end{aligned}$$

注意到$\{\mathbf{E}_t\}$为 $i.i.d$ 序列，故上式与t无关，故得证 ■

令 $x=(x_1,x_2,\cdots,x_p)$，$y=(y_1,y_2,\cdots,y_p)$，则上述Markov链的转移概率密度为

$$P(x,y)=\begin{cases} f_i(y_p-\sum_{j=1}^{p}A_j^{(i)}y_{p-j}) & 当y_{j-1}=x_j,\ j=1,\cdots,p且y_{p-d}\in R_i^k \\ 0 & 其它\end{cases}$$

可以证明，上述Markov链是不可约、非周期和Harris常返的[1],[3]。

设μ为此不可约链的不变测度。令

$$\mathscr{B}_\mu=\{A:\ \ A\in\mathscr{F},\ 0<\mu(A)<\infty\}$$

则若K为$\mathscr{X}$上的有界区域，那末$K\in\mathscr{B}_\mu$(参见[2])。

定理 1 若(1)中的系数矩阵 $A_j^{(i)}$满足条件

$$\sum_{j=1}^{p}\|A_j^{(i)}\|<1 \qquad i=1,\ \cdots,\ l \tag{4}$$

其中 $\|A_j^{(i)}\|=\sum_{m=1}^{k}\max_{1\leqslant n\leqslant k}|a_j^{(i)}(m,n)|$，$i=1,\ \cdots,\ l$，$j=1,\cdots,p$。

则$\{\mathbf{Z}_t\}$是遍历的。

证明 从条件(4)知，能找到一串常数C_1，$C_2,\cdots,C_p$，使得

$$1=C_1<C_2<\cdots<C_p,\quad \sum_{j=1}^{p}\|A_j^{(i)}\|C_j<\varepsilon<1, \tag{5}$$

且$C_i/C_{i+1}<\varepsilon$，对$1\leqslant i\leqslant p-1$ 成立。

令

$$g(y)=\max_{1\leqslant i\leqslant p}\frac{\|y_i\|^2}{C_{p-i+1}^2}，其中\|y_i\|为y_i的模。$$

则当$x_{p-d+1}\in R_i^k$时

$$\int_{R^k} P(x,dy)g(y)=\int_{R^k} f_i\Big(y_p-\sum_{j=1}^{p}A_j^{(i)}y_{p-j}\Big)\max_{1\le i\le p}\frac{\|y_i\|^2}{C_{p-i+1}^2}\,dy_p$$

$$=\int_{R^k} f_i(z)\max_{1\le i\le p-1}\Big\{\frac{\|y_i\|^2}{C_{p-i+1}^2},\ \|z+\sum_{j=1}^{p}A_j^{(i)}y_{p-j}\|^2\Big\}dz.$$

记
$$w_k=\Big\{z:\ \|z+\sum_{j=1}^{p}A_j^{(i)}y_{p-j}\|\le\max_{1\le i\le p-1}\frac{\|y_i\|}{C_{p-i+1}}\Big\}$$

注意到(5)式，我们有

$$\int_{R^k}P(x,dy)g(y)\le\max_{1\le i\le p-1}\frac{\|y_i\|^2}{C_{p-i+1}^2}\int_{w_k}f_i(z)dz+\int_{\overline{w}_k}\Big(\|z\|+\sum_{j=1}^{p}\|A_j^{(i)}y_{p-j}\|\Big)^2f_i(z)dz$$

$$\le\max_{1\le i\le p-1}\frac{\varepsilon^2\|x_{i+1}\|^2}{C_{p-i}^2}\int_{w_k}f_i(z)dz+\int_{R^k}\|z\|^2f_i(z)dz+2\sum_{j=1}^{p}\|A_j^{(i)}\|\|x_{p-j+1}\|$$

$$\cdot\int_{R^k}\|z\|f_i(z)dz+\Big(\sum_{j=1}^{p}\|A_j^{(i)}\|\|x_{p-j+1}\|\Big)^2\int_{\overline{w}_k}f_i(z)dz$$

$$\le\max_{1\le i\le p-1}\Big\{\frac{\varepsilon^2\|x_{i+1}\|^2}{C_{p-i}^2},\ \Big(\sum_{j=1}^{p}\|A_j^{(i)}\|\|x_{p-j+1}\|\Big)^2\Big\}+\delta_0+\sum_{j=1}^{p}\delta_j\|x_j\|$$

其中

$$\delta_0=\int_{R^k}\|z\|^2f_i(z)dz;\quad \delta_j=\max_{1\le i\le p-1}\Big\{2\|A_{p-j+1}^{(i)}\|\int_{R^k}\|z\|f_i(z)dz\Big\}.$$

对于取定的$\{C_i\}_1^p$及ε，令

$$W=\left\{x:\ \max_{1\le i\le p}\|x_i\|<\frac{1+\delta_0+\sum_{j=1}^{p}\delta_j\|x_j\|}{1-\varepsilon^2}\right\}$$

容易验证，W是一有界区域，且当$x\,\overline{\in}\,W$时

$$\int_{R^k}P(x,dy)g(y)\le g(x)-1$$

当$x\in W$时

$$\int_{R^k}P(x,dy)g(y)<\infty.$$

由〔2〕定理3.1，可知$\{\mathbf{Z}_t\}$是遍历的 ■

不难证明，在上述充分条件下，$\{\mathbf{Z}_t\}$的平稳分布二阶矩存在且有界(仿〔3〕证明)：

2　参数估计的强相容性

给定一组非零的观察值

$$Z_{1-p},\ \cdots,\ Z_0,\ Z_1,\ \cdots,\ Z_n,\ (Z_i\in R^k,\ i=1-p,\cdots,n)$$

令　$Y_n=(Z_1,\ \cdots,\ Z_n)_{k\times n};\ E_n=(\varepsilon_1,\ \cdots,\ \varepsilon_n)_{k\times n};$

$$A=(A_1, \cdots, A_l)_{k\times(k\cdot p\cdot l)}; \quad X_n=(x_{ij})_{(k\cdot p\cdot l)\times n}.$$

其中， $A_i=(A_1^{(i)},\cdots,A_p^{(i)})_{p\times(k\cdot p)}$; $\varepsilon_j=\sum_{i=1}^{l}\varepsilon_j^{(i)}\chi\{Z_{j-d}\in R_i^k\}$;

$$x_{ij}=\begin{pmatrix} Z_{j-1}\\ \vdots \\ Z_{j-p}\end{pmatrix}\chi\{Z_{j-d}\in R_i^k\}.$$

于是，模型可写为 $Y_n=AX_n+E_n$。

已知，A的最小二乘方估计为 $\hat{A}=Y_nX_n'(X_nX_n')^{-1}$。

性质 2 当n充分大，且使每个R_i中的观察值至少有 $k\cdot p$ 个时，$(X_nX_n')^{-1}$ 几乎处处存在。

证明 因为

$$\begin{pmatrix}\sum_{j=1}^{n}x_{1j}x_{1j}' & & 0\\ & \ddots & \\ 0 & & \sum_{j=1}^{n}x_{lj}x_{lj}'\end{pmatrix}\triangleq\begin{pmatrix}C_1 & & 0\\ & \ddots & \\ 0 & & C_l\end{pmatrix}$$

故X_nX_n'可逆$\Longleftrightarrow C_i(1\leqslant i\leqslant l)$可逆，而$C_i$可逆$\Longleftrightarrow rK(x_{i1},\cdots,x_{in})=k\cdot p$。

事实上，$P\{rK(x_{i1},\cdots,x_{in})<kp\}\leqslant$

$$\leqslant\sum_{1<n_1<\cdots<n_{k\cdot p}<n}P\left\{rK(x_{in_1},\cdots,x_{in_{k\cdot p}})<k\cdot p/Z_{n_s-d}\in R_i^k,\ s=1,\cdots,k\cdot p\right\}$$

$$\leqslant\sum_{1<n_1<\cdots<n_{k\cdot p}<n}\sum_{s=1}^{k\cdot p}P\left\{x_{in_s}=b_1^{(s)}x_{in_1}+\cdots+b_{s-1}^{(s)}x_{in_{s-1}}/Z_{n_s-d}\in R_i^k, s=1,\cdots,k\cdot p\right\}$$

$$\triangleq\sum_{1<n_1<\cdots<n_{k\cdot p}<n}\sum_{s=1}^{k\cdot p}\triangle_s$$

将$\triangle_s$改写为

$$P\left\{\mathbf{Z}_{n_s}=b_1^{(s)}\mathbf{Z}_{n_1}+\cdots+b_{s-1}^{(s)}\mathbf{Z}_{n_{s-1}}/\mathbf{Z}_{n_s-d}\in R_i^k,\ s=1,\cdots,k\cdot p\right\}$$

由(2)，当$Z_{t-d}\in R_i^k$时

$$\mathbf{Z}_{t+1}=\mathbf{Z}_tB+\sum_{j=1}^{p}A_j^{(i)}(\mathbf{Z}_tC_j)+\mathbf{E}_tD_i\triangleq h_1(\mathbf{Z}_t)+h_2(\mathbf{E}_t).$$

于是当 $Z_{n_s-d}\in R_i^k$ 时 $(s=1,\cdots,k\cdot p)$，

$$\mathbf{Z}_{n_s}=h_1(\mathbf{Z}_{n_s-1})+h_2(\mathbf{E}_{n_s-1}).$$

将上式代入$\triangle_s$中并稍加变换得

$$\Delta_s=P\left\{h_2(\mathbf{E}_{n_s-1})=b_1^{(s)}\mathbf{Z}_{n_1}+\cdots+b_{s-1}^{(s)}\mathbf{Z}_{n_s-1}-h_1(\mathbf{Z}_{n_s-1})/Z_{n_s-d}\in R_i^k, s=1,\cdots,k\cdot p\right\}$$

由于$\mathbf{E}_{n_s-1}$与$\mathbf{Z}_{n_1}$，$\cdots\mathbf{Z}_{n_{s-1}}$及$Z_{n_s-1}$独立，故$\Delta_s=0$，从而$P\{rK(x_{i1},\cdots,x_{in_{k\cdot p}})<k\cdot p\}=0$，因此我们得到$\left(X_nX_n'\right)^{-1}$几乎处处存在 ■

性质3　$\frac{1}{n}E_nX_n' \longrightarrow 0$　a.s.

证明　$\frac{1}{n}E_nX_n' = \left(\frac{1}{n}\sum_{m=1}^{n}\varepsilon_m Z_{m-1}'\chi_{\{Z_{m-d}\in R_1^k\}}, \cdots, \frac{1}{n}\sum_{m=1}^{n}\varepsilon_m Z_{m-p}\chi_{\{Z_{m-d}\in R_1^k\}}, \right.$

$\left. \cdots, \frac{1}{n}\sum_{m=1}^{n}\varepsilon_m Z_{m-1}'\chi_{\{Z_{m-d}\in R_l^k\}}, \cdots, \frac{1}{n}\sum_{m=1}^{n}\varepsilon_m Z_{m-p}'\chi_{\{Z_{m-d}\in R_l^k\}}\right)$.

其中$\frac{1}{n}\sum_{m=1}^{n}\varepsilon_m Z_{m-j}'\chi_{\{Z_{m-d}\in R_i^k\}} = \sum_{i=1}^{l}\left(\frac{1}{n}\sum_{m=1}^{n}\varepsilon_m^{(i)}(s)Z_{m-j}(t)\chi_{\{Z_{m-d}\in R_i^k\}}\right)_{k\times k}'$

记　　$y_m = \varepsilon_m^{(i)}(s)Z_{m-j}(t)\chi_{\{Z_{m-d}\in R_i^k\}}$;　　$\mathscr{F}_m = \sigma(y_i, i\leq m)$.

则容易验证y_m关于$\mathscr{F}_m$是一鞅差序列。且

$$E y_m^2 = E(E(y_m^2/\mathscr{F}_{m-1})) = E\left\{E\left(\varepsilon_m^{(i)^2}(s)Z_{m-j}^2(t)\chi_{\{Z_{m-d}\in R_i^k\}}\right)/\mathscr{F}_{m-1}\right\}$$

$$= EZ_{m-j}^2(t)\cdot E\varepsilon_m^{(i)^2}(s) < \infty.$$

从而$\sum_n Ey_n^2/n^2 < \infty$。根据[4]定理3.3.8，$\lim_{n\to\infty}\frac{1}{n}\sum_{m=1}^{n}y_m = 0$，故得$\lim_{n\to\infty}\frac{1}{n}E_nX_n' = (0,\cdots,0) = 0$ ■

定理2　当（4）式及性质2的条件成立时，$\hat{A}\longrightarrow A$，a.s.

证明　由于

$$\hat{A} - A = Y_nX_n'(X_nX_n')^{-1} - A = E_nX_n'(X_nX_n')^{-1}.$$

$$= \left(\frac{1}{n}E_nX_n'\right)\left(\frac{1}{n}X_nX_n'\right)^{-1}$$

但是[3]，$\frac{1}{n}(X_nX_n')^{-1}\longrightarrow H^{-1} > 0$，a.s. 由性质3即得$\hat{A} - A\longrightarrow 0$，a.s. ■

下面讨论白噪声$\{\varepsilon_t^{(i)}\}$的方差阵G的估计及其强相容性。

用残差平方和作为G的估计

$$\hat{G} = \frac{1}{n}E_n\left[I_n - X_n'(X_nX_n')^{-1}X_n\right]E_n' = \frac{1}{n}E_nE_n' - \left(\frac{1}{n}E_nX_n'\right)\left(\frac{1}{n}X_nX_n'\right)^{-1}\left(\frac{1}{n}E_nX_n'\right)'$$

定理3　在定理2的条件下，若还有$\varepsilon_t^{(i)}$的$2+\delta(\delta>0)$阶矩存在（$i=1,2,\cdots,l$，$t=1,2\cdots$）则有

$$\hat{G}\longrightarrow G\quad \text{a.s.}$$

证明　由性质3知，上述$\hat{G}$的表达式中的第二项几乎处处趋于0，而

$$\frac{1}{n}E_nE_n' = \frac{1}{n}\sum_{m=1}^{n}\varepsilon_m\varepsilon_m' = \frac{1}{n}\sum_{m=1}^{n}\sum_{i=1}^{l}\varepsilon_m^{(i)}\varepsilon_m^{(i)'}\chi_{\{Z_{m-d}\in R_i^k\}}$$

$$= \sum_{i=1}^{l}\left(\frac{1}{n}\sum_{m=1}^{n}\varepsilon_m^{(i)}(s)\varepsilon_m^{(i)}(t)\chi_{\{Z_{m-d}\in R_i^k\}}\right)_{k\times k}$$

故 $$\frac{1}{n}E_nE_n'-G=\sum_{i=1}^{l}\left(\frac{1}{n}\sum_{i=1}^{n}\left(\varepsilon_m^{(i)}(s)\,\varepsilon_m^{(i)}(t)-\gamma_{s,t}\right)\chi_{\{Z_{m-d}\in R_i^k\}}\right)_{k\times k}$$

令 $$y_n=\left(\varepsilon_n^{(i)}(s)\,\varepsilon_n^{(i)}(t)-\gamma_{s,t}\right)\chi_{\{Z_{m-d}\in R_i^k\}}$$

$$\mathscr{F}_n=\sigma(y_t,\ t\leqslant n).$$

对于固定的i. t. s. $\left\{\varepsilon_n^{(i)}(t)\,\varepsilon_n^{(i)}(s)\right\}$为$i.i.d$序列，设$y$为其分布所对应的随机变数，则有$E|y|<\infty$，且对任意$x\geqslant 0$，

$$P\{|y_n|>x\}\leqslant P\left\{|\varepsilon_n^{(i)}(s)\varepsilon_n^{(i)}(t)|>x\right\}=P\{|y|>x\},$$ 且

$$E\,(y_n/\mathscr{F}_{n-1})=E\left(\varepsilon_n^{(i)}(t)\,\varepsilon_n^{(i)}(s)\chi_{\{Z_{n-d}\in R_i^k\}}/\mathscr{F}_{n-1}\right)$$

$$=\chi_{\{Z_{n-d}\in R_i^k\}}E\left(\varepsilon_n^{(i)}(s)\,\varepsilon_n^{(i)}(t)/\mathscr{F}_{n-1}\right)=\gamma_{s,t}\chi_{\{Z_{n-d}\in R_i^k\}}.$$

当 $\varepsilon_t^{(i)}$ 的$2+\delta(\delta>0)$阶矩存在时，$E|y\log^+|y||<\infty$，由〔5〕的定理2.19有

$$\frac{1}{n}\sum_{m=1}^{n}\left(\varepsilon_m^{(i)}(s)\,\varepsilon_m^{(i)}(t)-\gamma_{s,t}\right)\chi_{\{Z_{m-d}\in R_i^k\}}\longrightarrow 0\quad a.s.$$

从而 $$\frac{1}{n}E_nE_n'-G\longrightarrow 0\quad a.s.$$

即 $$\hat{G}\longrightarrow G,\quad a.s.\ \blacksquare$$

参 考 文 献

〔1〕Tweedie R L, *Ann. Prob*, 2 (1974), 5, 840～864

〔2〕Tweedie R L, *Stoch. Prob. Appl.*, 1975, 3, 385～403

〔3〕范文宁等，应用概率统计，2(1986)，3，259～266

〔4〕Stout W F, *Almost Sure Convergence*, Academic, London,1974

〔5〕Hall, P et al., *Martingale Limit Theory and Its Application*, Academic, New York, 1980

Strong Consistency of Estimates of Parameters for Multiple TAR Models

Song Xingyuan Deng Jixian*

Abstract

Through studying markov properties of the multiple Threshold Autoregressive(TAR) Model in which the order, the thresholds and delay parameter are given, we obtain the strong consistency of the least square estimates of the coefficint matrices and covariance matrix of the white noises. The results extend the corresponding results of paper(6).

Keywords threshold autoregressive, strong consistency, ergodicity

* Department of Mathematics