第30卷 第1期 中山大学学报(自然科学版) Vol.30 No.1
1991年 ACTA SCIENTIARUM NATURALIUM UNIVERSITATIS SUNYATSENI 1991

滞后型泛函微分方程的M_0稳定性研究

徐远通
(数学系)

摘 要

利用李雅普诺夫直接方法及比较原理，建立滞后型泛函微分方程M_0稳定性的判定准则，推广了J. C. Moore的研究结果.

关键词 M_0稳定性，泛函微分方程，比较原理

1 基本概念和记号

在泛函微分方程领域中，引入M_0稳定性概念[1,2]，使解集和不变集有关研究从有限维空间推广到无限维空间。考虑以下广义初值问题

$$\dot{x}=F(t,x_t),\quad x_\sigma=\Psi(\sigma,\phi),\quad \sigma\geqslant 0 \tag{1}$$

此方程的相空间C仍采用从$[-r,0]$到R^n的连续函数组成的空间。设泛函F及Ψ有足够条件保证解的存在性。

以$M(R_+,C)$表示从R_+到C的映射X组成的空间，对于$t\in R_+$，记$\|X(t)\|=\sup\limits_{-r<\theta<0}|X(t)(\theta)|$，

它局部可积且使得

$$\sup_{t>0}\int_t^{t+1}\|X(s)\|\mathrm{d}s<\infty \tag{2}$$

对$M(R_+,C)$我们引入记号：

$$\|X\|_{s,t}\triangleq\int_t^{t+1}\|X(s)\|\mathrm{d}s,\quad 对X\in M(R_+,C)$$

又设$M_0(R_+,C)$是$M(R_+,C)$的子空间，一切$X\in M_0$均满足

$$\|X\|_{s,t}\to 0,\ 当t\to\infty时 \tag{3}$$

对于方程(1)，称$x=0$是**M_0不变集**，若$\Psi(\sigma,0)\in M_0$蕴含着解映射$x_t(\sigma,\Psi(\sigma,0))\in M_0$，对一切$t\geqslant\sigma$成立。

使用记号$x_t(\phi)\triangleq x_t(\sigma,\Psi(\sigma,\phi))$。设$x=0$是(1)的$M_0$不变集，相应有以下定义：

定义1 给定$\varepsilon>0$，存在$\tau(\varepsilon)$，对$t_0\geqslant\tau(\varepsilon)$，存在$\delta_1$及$\delta_2$，使得$\|\phi\|<\delta_1$及$\|\Psi(\cdot,\phi)\|_{\sigma,t_0}<\delta_2$时$\|x_t(\phi)\|_{\sigma,t_0}<\varepsilon$，对$t\geqslant t_0+1$，则称$x=0$是**$M_0$稳定的**。否则称为**$M_0$不稳定**。若$\delta_1$及$\delta_2$与$t_0$无关，则称为**$M_0$一致稳定**。

定义2 存在$\tau_0>0$，对$t_0\geqslant\tau_0$，有δ'及δ''，当$\|\phi\|<\delta'$及$\|\Psi(\cdot,\phi)\|_{\sigma,t}<\delta''$时，

本文1989年1月10日收到

任给$\varepsilon>0$，必有T，使$\|x_t(\phi)\|_{\sigma,t_0}<\varepsilon$，对$t\geqslant t_0+T+1$成立，则称$x=0$是**$M_0$吸引的**。若$\delta'$，$\delta''$，$T$均与$t_0$无关，则称为**$M_0$一致吸引**。

如果M_0稳定且M_0吸引，则称为**M_0渐近稳定**；若M_0稳定和吸引均是一致的，则称为**M_0一致渐近稳定**。

设李雅普诺夫函数$V\epsilon C(R_+\times R^n,\ R)$，记

$$V_{\sigma,t_0}(t,\varphi_\sigma(\theta))\triangleq\int_{t_0}^{t_0+1}V(t,\varphi_\sigma(\theta))\mathrm{d}\sigma,\quad -r\leqslant\theta\leqslant 0,\quad \varphi_\sigma\epsilon C.$$

而沿着(1)的解集“平均值”的导数记为

$$\dot V_{\sigma,t_0}(t,\varphi_\sigma)\triangleq\overline{\lim_{h\to 0+}}\ \frac{1}{h}\left\{\int_{t_0}^{t_0+1}[V(t+h,x(t,\varphi_\sigma)(t+h))-V(t,\varphi_\sigma(0))]\mathrm{d}\sigma\right\}\tag{4}$$

对一个连续函数a，如果$a(0)=0$且严格递增，则记为$a\epsilon K$；如果a同时是凸函数，则记为$a\epsilon KC$；如果$-a$才是凸函数，则记为$a\epsilon KC'$。

如果函数$b\epsilon K$，且对$\varepsilon>0$及$t_0\geqslant 0$，存在δ_1及δ_2，使得$\|\phi\|<\delta_1$及$\|\Psi(\cdot,\phi)\|_{\sigma,t_0}<\delta_2$时，$\|b(\|\Psi(\cdot,\phi)\|)\|_{\sigma,t_0}<\varepsilon$，则记$b\epsilon P$；如果$\delta_1$及$\delta_2$与$t_0$无关，则记为$b\epsilon UP$。

2　主要定理

采用纯量比较方程

$$u'=g(t,u),\quad u(t_0)=\phi(t_0,u^*)\tag{5}$$

这里，$g\epsilon C(R_+\times R_+,R)$，$\phi\epsilon C(R_+\times R_+,R_+)$，以$u_M^+$及$u_M^-$表示（5）在$t\geqslant t_0$及$t\leqslant t_0$上过$(t_0,\phi(t_0,u^*))$的最大解。

引理[3,4] 设$v(t)$是$[\sigma-r,\infty)$上的连续函数，对$t\geqslant\sigma$，当$v(t+\theta)\leqslant u_M^-(t+\theta,t,v(t))$，$-r\leqslant\theta\leqslant 0$时有$\dot v(t)\leqslant g(t,v(t))$，则对适合$v(\xi)\leqslant u_M^-(\xi,\sigma,u_0)$，$\xi\epsilon[\sigma-r,\sigma]$的$u_0$有$v(t)\leqslant u_M^+(t,\sigma,u_0)$，$t\geqslant\sigma$。

定理1　设$V(t,x)$对x满足局部李普希兹条件，且

1）$a(\|x\|)\leqslant V(t,x)\leqslant b(\|x\|)$，$a\epsilon KC$，$b\epsilon P$，

2）$\dot V_{\sigma,t_0}(t,\varphi_\sigma)\leqslant g(t,V_{\sigma,t_0}(t,\varphi_\sigma(0)))$，$\varphi_\sigma\epsilon\Omega$，$t\geqslant t_0$。

其中，$\Omega=\{\varphi_\sigma\epsilon C:\ V_{\sigma,t_0}(t+\theta,\varphi_\sigma(\theta))\leqslant u_M^-(t+\theta,t,V_{\sigma,t_0}(t,\varphi_\sigma(0))),-r\leqslant\theta\leqslant 0\}$，那么，由（5）对$u=0$是$M_0$稳定推出（1）对$x=0$是$M_0$稳定的。

证明　给定$\varepsilon>0$，由于（5）对$u=0$是M_0稳定，故对$a(\varepsilon)>0$，存在$\tau(\varepsilon)$，对$t_0\geqslant\tau(\varepsilon)$，有$\delta_1'$及$\delta_2'$，使$u^*<\delta_1'$及$\|\phi(\cdot,u^*)\|_{\sigma,t_0}<\delta_2'$时$\|u(t,\cdot,\phi(\cdot,u^*))\|_{\sigma,t_0}<a(\varepsilon)$，对$t\geqslant t_0+1$，于是

$$\|u_M^+(t,\cdot,\phi(\cdot,u^*))\|_{\sigma,t_0}<a(\varepsilon),\quad 对t\geqslant t_0+1\tag{6}$$

对适合上述条件的u^*及$t_0\geqslant\tau(\varepsilon)$，令

$$\eta=\inf\{u_M^-(\xi,\sigma,\phi(\sigma,u^*))\,|\,\sigma-r\leqslant\xi\leqslant\sigma,t_0\leqslant\sigma\leqslant t_0+1\}$$

由u_M^-的连续性知$\eta>0$。因$b\epsilon P$，则存在δ_1''及δ_2''，使得$\|\phi\|<\delta_1''$及$\|\Psi(\cdot,\phi)\|_{\sigma,t_0}<\delta_2''$时$\|b(\|\Psi(\cdot,\phi)\|)\|_{\sigma,t_0}<\eta$。

取$\delta_1=\min(\delta_1',\delta_1'')$，$\delta_2=\min(\delta_2',\delta_2'')$。由条件2)，可以令

$$\varphi_\sigma(\theta)=x_t(\sigma,\Psi(\sigma,\phi))(\theta),\ -r\leqslant\theta\leqslant0;\quad v(t)=V_{\sigma,t_0}(t,\varphi_\sigma(0)),\text{则}$$

$$\dot v(t)\leqslant g(t,v(t)),\quad t\geqslant t_0$$

对$v(t+\theta)\leqslant u_M^-(t+\theta,t,v(t))$，$-r\leqslant\theta\leqslant0$成立，故利用引理得

$$v(t)\leqslant u_M^+(t,\sigma,u_0),\quad t\geqslant\sigma \tag{7}$$

对适合$v(\xi)\leqslant u_M^-(\xi,\sigma,u_0)$，$\xi\leqslant\sigma$的$u_0$成立。取$u_0=\phi(\sigma,u^*)$，则

$$\|b(\|\Psi(\cdot,\phi)\|)\|_{\sigma,t_0}<\eta\leqslant u_M^-(\xi,\sigma,\phi(\sigma,u^*)),\quad t_0\leqslant\sigma\leqslant t_0+1$$

由条件1)知

$$v(\xi)=V_{\sigma,t_0}(\xi,x_\sigma(0))\leqslant\|b(\|\Psi(\cdot,\phi)\|)\|_{\sigma,t_0}<u_M^-(\xi,\sigma,\phi(\sigma,u^*))$$

根据(7)式，对$t\geqslant\sigma$有$v(t)\leqslant u_M^+(t,\sigma,\phi(\sigma,u^*))$，$t_0\leqslant\sigma\leqslant t_0+1$。从而得出

$$V_{\sigma,t_0}(t,\varphi_\sigma(0))\leqslant\|u_M^+(t,\cdot,\phi(\cdot,u^*))\|_{\sigma,t_0},\quad t\geqslant t_0+1$$

由(6)式及条件1)得到

$$a(\|x_t(\cdot,\Psi(\cdot,\phi))\|_{\sigma,t_0})<a(\varepsilon),\quad t\geqslant t_0+1$$

因此，$\|x_t(\phi)\|_{\sigma,t_0}<\varepsilon$，对$t\geqslant t_0+1$。定理1成立。

推论　若定理1条件成立，$b\epsilon UP$，且η与t_0无关，则(5)对$n=0$是M_0一致稳定推出(1)对$x=0$是M_0一致稳定。

定理2　如果定理1条件成立，则由(5)对$u=0$是M_0渐近稳定可推出(1)对$x=0$是M_0渐近稳定。

证明　这时因(1)对$x=0$是M_0稳定，故只需证其M_0吸引。由于(5)对$u=0$是M_0渐近稳定，存在τ_0，对$t_0\geqslant\tau_0$，有δ_0'及δ_0''，当$u^*<\delta_0'$及$\|\phi(\cdot,u^*)\|_{\sigma,t}<\delta_0''$时，任给$\varepsilon>0$，对$a(\varepsilon)$，存在$T(t_0,\varepsilon)$，使得$t\geqslant t_0+T+1$时

$$\|u(t,\cdot,\phi(\cdot,u^*))\|_{\sigma,t_0}<a(\varepsilon) \tag{8}$$

令
$$\eta=\inf\{u_M^-(\xi,\sigma,u^*):\sigma-r\leqslant\xi\leqslant\sigma,\ t_0\leqslant\sigma\leqslant t_0+1\} \tag{9}$$

仍有$\eta>0$，且由$b\epsilon P$，有δ'及δ''，$\|\phi\|<\delta'$及$\|\Psi(\cdot,\phi)\|_{\sigma,t}<\delta''$时

$$\|b(\|\Psi(\cdot,\phi)\|)\|_{\sigma,t_0}<\eta,\quad\text{对}t_0\geqslant\tau_0。$$

而从定理1的论证中，对$t\geqslant t_0+1$有

$$V_{\sigma,t_0}(t,\varphi_\sigma(0))\leqslant\|u_M^+(t,\cdot,\phi(\cdot,u^*))\|_{\sigma,t_0} \tag{10}$$

由(8)式则得

$$\|u_M^+(t,\cdot,\phi(\cdot,u^*))\|_{\sigma,t_0}<a(\varepsilon),\ t\geqslant t_0+T+1$$

从条件1)及(10)式得到

$$a(\|x_t(\cdot,\Psi(\cdot,\phi))\|_{\sigma,t_0})<a(\varepsilon),\ t\geqslant t_0+T+1$$

因此，$\|x_t(\phi)\|_{\sigma,t_0}<\varepsilon$，对$t\geqslant t_0+T+1$成立。定理2得证。

推论 若定理条件成立，$b\in UP$，(9)中η与t_0无关，则(5)对$u=0$是M_0一致渐近稳定推出(1)对$x=0$有同样稳定性。

现设V：$R\times C\to R$是连续泛函，对$\varphi\in C$，定义

$$D_+V(t,\varphi)=\varliminf_{h\to0+}\frac{1}{h}[V(t+h,x_{t+h}(t,\varphi))-V(t,\varphi)]$$

并采用记号：$V_{s,t_0}(\phi_s)\triangleq\int_{t_0}^{t_0+1}V(s,\phi_s)\mathrm{d}s$，对$\phi_s\in C$。

定理3 设泛函$V\in C(R\times C,\ R)$满足

1) $V(t,\varphi)\leqslant a(\|\varphi(0)\|)$，$a\in KC'$；

2) 对任给$\delta>0$及$t_0\geqslant0$，有$\phi\in C$，$\|\phi\|<\delta$，$\|\Psi(\cdot,\phi)\|_{\sigma,t_0}<\delta$，使得$V_{\sigma,t_0}(\Psi(\sigma,\phi))>0$；

3) $D^+V(t,\varphi)\geqslant b(\|\varphi(0)\|)$，$b\in KC$；

那么，方程(1)对$x=0$是M_0不稳定的。

证明 若不然，则定义1成立，取$\delta=\min(\delta_1,\delta_2)>0$，由条件2)，有$\phi\in C$，使$\|\phi\|<\delta$，$\|\Psi(\cdot,\phi)\|_{\sigma,t_0}<\delta$，$V_{\sigma,t_0}(\Psi(\sigma,\phi))>0$。而根据条件1)，则可推出对$t\geqslant t_0+1$，有

$$V_{\sigma,t_0}(t,x_t(\sigma,\Psi(\sigma,\phi)))\leqslant a(\|x_t(\sigma,\Psi(\sigma,\phi))\|_{\sigma,t_0})\leqslant a(\varepsilon) \tag{11}$$

由条件3)知$V(t,x_t(\sigma,\Psi(\sigma,\phi)))$对$t$递增，故可推出

$$V_{\sigma,t_0}(\Psi(\sigma,\phi))\leqslant V_{\sigma,t_0}(t,x_t(\sigma,\Psi(\sigma,\phi)))\leqslant a(\|x_t(\phi)\|_{\sigma,t_0}) \tag{12}$$

从而由(12)式得

$$a^{-1}(V_{\sigma,t_0}(\Psi(\sigma,\phi)))\leqslant\|x_t(\phi)\|_{\sigma,t_0}$$

令$\gamma=b(a^{-1}(V_{\sigma,t_0}(\Psi(\sigma,\phi))))$，则从条件3)得出

$$V(t,x_t(\sigma,\Psi(\sigma,\phi)))\geqslant V(\sigma,\Psi(\sigma,\phi))+\int_\sigma^t b(\|x_s(\sigma,\Psi(\sigma,\phi))(0)\|)\mathrm{d}s$$

于是

$$\begin{aligned}V_{\sigma,t_0}(t,x_t(\sigma,\Psi(\sigma,\phi)))&\geqslant V_{\sigma,t_0}(\Psi(\sigma,\phi))+\int_{t_0+1}^t b(a^{-1}(V_{\sigma,t_0}(\Psi(\sigma,\phi))))\mathrm{d}s\\&\geqslant V_{\sigma,t_0}(\Psi(\sigma,\phi))+\gamma(t-t_0-1)\end{aligned}$$

因此得出：$\lim\limits_{t\to\infty}V_{\sigma,t_0}(t,x_t(\sigma,\Psi(\sigma,\phi)))=+\infty$，与(11)式矛盾。

注记　上面只对集"$x=0$"讨论了M_0稳定性。对一般的集$\Omega\subset C$，可类似给出M_0稳定性定义，并得出类似定理1到定理3的结论。

最后，给出一个例子说明定理的应用。

例　$\dot{x}=F(t,x_t)$，$x_\sigma=\phi$，$\sigma\geqslant 0$

其中，
$$F(t,\varphi)=\begin{cases}-a\varphi(0)-\dfrac{1}{\varphi(0)}[b\varphi^2(-r)+\lambda'(t)], & 对\varphi(0)\neq 0; \\ -\lambda'(t), & 对\varphi(0)=0. \end{cases}\qquad (a>0,\ b>0)$$

$$\lambda(t)=\begin{cases} n & t=n \\ 2n^4(t-n)+n & n-\dfrac{1}{2n^3}<t<n \\ -2n^4(t-n)+n & n<t<n+\dfrac{1}{2n^3} \\ 0 & 对其它的t\geqslant 0 \end{cases}$$

除一个零测集以外，$\lambda'(t)$均存在。方程$u'=-\lambda'(t)$的正解为

$$u(t,s,\phi(s,u^*))=u^*+\lambda(t_0)-\lambda(t)\leqslant u^*+\lambda(t_0),$$

而　$\int_{t_0}^{t_0+1}\lambda(s)\mathrm{d}s$　对$t_0\leqslant n\leqslant t_0+1$不大于$\dfrac{1}{2n^2}$，故$u=0$是$M_0$一致稳定。

取$V(t,x)=\dfrac{x^2}{2}$，则$V(t,x)$满足定理1的条件1)且

$$\dot{V}(t,x)=-ax^2(t)-bx^2(t-r)-\lambda'(t)\leqslant-\lambda'(t)$$

以$u'=-\lambda'(t)$为比较方程，则条件2)也满足，故此方程对$x=0$是M_0稳定的。

参 考 文 献

〔1〕Moore J C, *J. Math. Anal. Appl.*, 112(1985), 1～13

〔2〕Leela S et al., *J. Math. Anal. Appl.*, 130(1988), 460～466

〔3〕Hale J K, *Theory of Functional Differential Equations*, Springer—Verlag, New York, 1977

〔4〕徐远通，泛函微分方程与测度微分方程，中山大学出版社，1988

A Study of M_0-stability of Retarded Functional Differential Equations

*Xu Yuantong**

Abstract

Criteria for M_0—stability of retarded functional differential equations are established by using Liapunov direct method and comparison principles. The work generalizes the results by J.C. Moore.

Keywords　M_0-stability, functional differential equations, comparison principle

* Department of Mathematics