

2+1维U(1)格点规范理论的相图*

刘金明

宫蒂

(物理学系)

(无线电电子学系)

摘要 应用单元格试探作用量变分法研究2+1维U(1)格点规范场的相图。解析地计算出序参量——平均元格能量,与MC方法所得结果符合很好。证实2+1维U(1)格点规范理论是禁闭的。消除了以往文献中用单链试探作用量变分法出现的不正确的一级相变点,还可以很方便地计算到比MC方法的 β 更大的深度弱耦合区。

关键词 格点规范理论, U(1)规范理论

1974年, Wilson成功地提出了一个非微扰处理强作用的理论方法——格点规范理论^[1]。这一理论提供了最方便的定域规范不变的正规化方法。10多年来,人们采用Monte Carlo数值模拟方法(MC方法)已经得到了关于非微扰效应的许多重要结果,特别是说明了量子色动力学具有色禁闭的重要性质。然而,格点规范理论还必须同时证明量子电动力学的格点形式——U(1)格点规范理论没有禁闭性质。MC方法结果^[2,3]确实表明在时空维数 $D \geq 4$ 时,U(1)格点规范理论至少有两个相,发生了解除禁闭的相变。而在 $D < 4$ 时,U(1)格点规范理论只有一个禁闭相。

格点规范理论的解析研究也有一定进展,在讨论纯规范场相结构方面,比较成功的理论是平均场方法、作用量变分法、作用量变分-累积展开方法等^[4,5]。但它们都有各自的适用范围和局限性。在应用于讨论2+1维U(1)格点规范理论的相结构时,都出现了不正确的一级相变点。其原因在于使用了“单链试探作用量”。本文应用作用量变分法时,采用“单元格试探作用量”研究2+1维U(1)格点规范理论的相图,得出与MC方法一致的结果,证实2+1维U(1)格点规范理论是禁闭的。本文的方法可以很方便地计算到 β 更大的深度弱耦合区。

1 作用量变分法与变分累积展开法

在格点规范理论中,SU(N)纯规范场的作用量S为

$$S = \frac{\beta}{2N} \sum_p \text{tr} (U_p + U_p^*) \quad (1)$$

相应的配分函数Z和自由能W分别为

本文1991年4月26日收到

· 国家自然科学基金和中山大学高等学术研究中心基金资助项目

$$\mathbf{Z} = \int DU_l e^S, \quad DU_l = \prod_l dU_l \quad (2)$$

$$W = -\ln \mathbf{Z} \quad (3)$$

式中, U_l 为链 l 上规范群的一个元素, $\beta = 2N/g^2$, g 为耦合常数. p 代表元方格, U_p 为组成元方格 p 的 4 个链上的 U_l 的乘积.

目前还不能准确计算由式(2)确定的配分函数 \mathbf{Z} , 因此要采取各种近似方法. 假如我们用能够严格准确计算的试探作用量 S_0 代替作用量 S , 引进相应的试探配分函数 \mathbf{Z}_0 和试探自由能 W_0 , 它们分别为

$$\mathbf{Z}_0 = \int DU_l e^{S_0} \quad (4)$$

$$W_0 = -\ln \mathbf{Z}_0 \quad (5)$$

利用凸性不等式

$$\langle e^{S-S_0} \rangle_0 \geq e^{\langle S-S_0 \rangle_0} \quad (6)$$

得

$$W \leq W_{eff,1} \quad (7)$$

其中 $\langle \rangle_0$ 是在试探作用量 S_0 中的平均值, 而

$$W_{eff,1} \equiv W_0 - \langle S - S_0 \rangle_0 \quad (8)$$

由以上不等式可见, 选 S_0 应使 $W_{eff,1}$ 为最小. 通常 S_0 依赖变分参数 z , 则对 z 变分, 由极小值条件

$$\partial W_{eff,1} / \partial z = 0, \quad \partial^2 W_{eff,1} / \partial z^2 > 0 \quad (9)$$

确定变分参数 z 的值, 这相当于选取一级近似自由能的极小值. 这时, $W_{eff,1}$ 给出自由能 W 的上限. 在研究纯规范场的相变时, 序参量为平均元格内能 E_p :

$$E_p = (1/N_p) \langle \sum_p [1 - \frac{1}{2N} \text{tr}(U_p + U_p^\dagger)] \rangle = 1 + (1/N_p) \frac{\partial W}{\partial \beta} \quad (10)$$

式中, N_p 为元格的总数. 从 $E_p - \beta$ 曲线, 就可以讨论此系统的相结构. 以上就是作用量变分法的原理. 显然这方法的近似程度依赖于 S_0 的选择.

为了作进一步的改进, 人们发展了变分-累积展开法^[4]. 即在(6)式中对 $\langle e^{S-S_0} \rangle_0$ 作累积展开, 得

$$W = W_0 - \sum_{n=1}^{\infty} \frac{1}{n!} K_n(\beta, z) \quad (11)$$

$$\text{式中, } K_n(\beta, z) = \langle (S - S_0)^n \rangle_c \quad (12)$$

c 表示累积展开. 在级数(11)式中, 若只取到 m 级项, 便得自由能的 m 级近似值

$$W \approx W_{eff,m} = W_0 - \sum_{n=1}^m \frac{1}{n!} K_n(\beta, z) \quad (13)$$

变分-累积展开的优点是可作逐级近似. 值得指出, 虽然 $W_{eff,1} \geq W$, 但当 $m > 1$, $W_{eff,m}$ 可能大于 W , 也可能小于 W . 而且对固定某个 $m > 1$ 值, “变分参数” z 取不同值时, $W_{eff,m}(\beta, z)$ 也可能大于或小于 W . 由于 W 是未知的, 所以预先无法由 $W_{eff,m}(\beta, z)$ 的计算确定参数 z 的值. 文献[5]提出由 $W_{eff,1}$ 极小确定参数 z 的值后, 再代入

(13)式求得 W 的近似值。这是可行的,也得到了较好的结果,但尚无严格的理论证明这种取法的收敛性。

通常使用的试探作用量 S_0 为

$$S_0 = \frac{z}{2N} \sum_I t_r (U_I + U_I^+) \quad (14)$$

即为各个链变量 U_I 之和, z 为变分参数,称之为“单链试探作用量”。其优点是可以解析地计算 W_0 和 $K_n(\beta, z)$ 。但这种单链试探作用量在强耦合区,求 $W_{eff,1}$ 极小值的方程(9)中,总有平庸解 $z=0$,当 $\beta \geq \beta_0$, $W_{eff,1}$ 极小条件(9)式出现多重根,选取 $W_{eff,1}$ 最低值的根,可得变分参数 $z \approx 0$,这就使序参数 E_p - β 曲线在 $\beta \approx \beta_0$ 附近出现跳跃,得出不正确的一级相变点。变分-累积展开法计算到二级或三级近似,可以减少这种跳跃量,使 E_p - β 曲线接近于连续,但终究不能使人满意。

2 单格试探作用量计算的结果

以下具体讨论 $2+1$ 维 $U(1)$ 格点规范场。以 $0, 1, 2$ 分别标记时间方向、 x 方向和 y 方向,于是沿3个方向上的链变量 U_I 分别记为 $U_0(t, x, y)$, $U_1(t, x, y)$ 和 $U_2(t, x, y)$ 。在 $\mu\nu$ ($\mu, \nu = 0, 1, 2$)平面上的元格变量 U_p 分别记为 $U_{01}(t, x, y)$, $U_{02}(t, x, y)$ 和 $U_{12}(t, x, y)$ 。配分函数(1)具体化为

$$Z = \int DU_0 DU_1 DU_2 \exp\left[\frac{\beta}{2} \sum_{t,x,y} (U_{01} + U_{02} + U_{12} + h.c.)\right] \quad (15)$$

式中,独立变量是链变量 U_0, U_1, U_2 ,指数上的元格变量 U_{01}, U_{02} 和 U_{12} 在求积分时,要用链变量表示。文献[6]指出可以将独立变量改为元格变量 $U_{01}(t, x, y)$, $U_{02}(t, x, y)$ 和 $U_{12}(t_0, x, y)$ (式中 t_0 为某个固定的数值),而且配分函数可改写为

$$Z = \int DU_{01} DU_{02} DU_{12}(t_0, x, y) \exp\left[\frac{\beta}{2} \sum_{t,x,y} (U_{01} + U_{02} + h.c.) \frac{\beta}{2} \sum_{t,x,y} (U_{12} + h.c.)\right] \quad (16)$$

式中, $U_{12}(t, x, y)$ 要用独立的元格变量表示,其值为

$$U_{12}(t, x, y) = V_{01}^+(t, x, y) V_{12}(t_0, x, y) V_{02}^+(t, x+1, y) V_{12}^+(t_0, x, y+1) \cdot V_{01}(t, x, y+1) V_{02}(t, x, y) \quad (17)$$

式中

$$V_{01}^+(t, x, y) \equiv \prod_{t'=t}^{t_0-1} U_{01}^+(t', x, y)$$

$$V_{12}(t_0, x, y) \equiv \prod_{y'=y}^{y_0-1} U_{12}(t_0, x, y')$$

$$V_{02}^+(t, x, y) = \prod_{t'=t}^{t_0-1} U_{02}^+(t', x, y)$$

(t_0, x_0, y_0)为格点中取定的一个固定点。通常取最大值的点,

我们选取试探作用量

$$S_1 = \frac{z}{2} \sum_{t,x,y} (U_{01} + U_{02} + h.c.) + \frac{z}{2} \sum_{x,y} (U_{12}(t_0, x, y) + h.c.) \quad (18)$$

即各个独立的元格变量之和, 称之为“单元格试探作用量”。相应的试探配分函数为

$$\begin{aligned} Z_1 &= \int DU_{01} DU_{02} DU_{12}(t_0, x, y) \exp\left[\frac{z}{2} \sum_{t,x,y} (U_{01} + U_{02} + h.c.)\right. \\ &\quad \left. + \frac{z}{2} \sum_{x,y} (U_{12}(t_0, x, y) + h.c.)\right] \\ &= \left[\int DU e^{\frac{z}{2}(U+U^*)} \right]^{N_F} \equiv Z^{N_F} \end{aligned} \quad (19)$$

式中 $N_F = 2N_1N_2N_0 + N_1N_2$ 为独立元格变量数, N_0 , N_1 和 N_2 分别为沿 t_0 , x 和 y 方向上格点的总数. z 为变分参数, 由相应的自由能极小条件确定.

对于 $U(1)$ 规范群, (19) 式中的单链积分 Z 容易求出, 得

$$Z = \int DU \exp\left[\frac{z}{2}(U+U^*)\right] = I_0(z) \quad (20)$$

I_0 为零阶虚宗量贝塞尔函数. 代入式(8), 便得应用单元格试探作用量的自由能近似值

$$\begin{aligned} W &\simeq W_{eff,1}^{(1)} = -\ln Z_1 - \langle S - S_1 \rangle_1 \\ &= -N_F \ln I_0(z) - N_F(\beta - z)y_1(z) - \frac{1}{2}N_1N_2\beta y_1^5/(1 - y_1^4) \end{aligned} \quad (21)$$

式中, $y_1 \equiv I_1(z)/I_0(z)$, $I_1(z)$ 为一阶虚宗量贝塞尔函数. 在各方向上的格点数 N_0 , N_1 和 N_2 都 $\rightarrow \infty$ 时, 最后一项的贡献可以忽略. 代入自由能极小条件(9)式, 得到变分参数 $z = \beta$. 于是我们得到自由能密度 $W^{(1)}$ 和序参量 $E_p^{(1)}$ 分别为

$$W^{(1)} = -\ln I_0(\beta) \quad (22)$$

$$E_p^{(1)} = 1 - y_1(\beta) \quad (23)$$

为了比较, 以下列出采用单链试探作用量 S_0 计算所得的自由能密度 $W^{(0)}$ 和序参量 $E_p^{(0)}$ 分别为

$$W^{(0)} = -\ln I_0 - \beta y_1^4 - z y_1 \quad (24)$$

$$E_p^{(0)} = \begin{cases} 1 & \text{当 } \beta < 1.4 \\ 1 - y_1^4 & \text{当 } \beta \geq 1.4 \end{cases} \quad (25)$$

式中变分参数 z 由极小值条件(9)式确定, 即

$$\begin{cases} z = 0 & \text{当 } \beta < 1.4 \\ z = 4\beta y_1(z)^3 & \text{当 } \beta \geq 1.4, \text{ 取最上面分支} \end{cases} \quad (26)$$

由(25)式可见, $E_p^{(0)}$ 在 $\beta = 1.4$ 附近有跳跃, 在强耦合区 ($\beta < 1.4$) $E_p^{(0)} = 1$, 与 MC 计算所得不符. 如果采用变分-累积展开方法作修正, 仍采用(26)式的变分参数 z 的值, 计算到二级, 可得^[5]

$$W_{eff,2}^{(0)} = -\ln I_0 - \beta y_1^4 + z y_1 - \frac{1}{4} [z^2(y_2 - 2y_1^2 + 1) + \beta^2(1 + y_2^4 - 26y_1^8 + 12y_1^6 + 12y_1^6 y_2) + 8\beta z(2y_1^2 - y_2 - 1)y_1^3] \quad (27)$$

$$E_{p,2}^{(0)} = 1 - y_1^4 - \frac{1}{2} \beta(1 + y_2^4 - 26y_1^8 + 12y_1^6 + 12y_1^6 y_2) + 2z(y_2 - 2y_1^2 + 1)y_1^3 \quad (28)$$

式中 $y_2 \equiv I_2(z)/I_0(z)$, $I_2(z)$ 为二阶虚宗量贝塞尔函数。式中的 z 取(26)式的值。

3 讨论与结论

图 1 分别给出 $E_p^{(0)}$, $E_{p,2}^{(0)}$ 和 $E_p^{(1)}$ - β 的函数关系并与 MC 方法计算所得结果^[2] 进行比较。从图 1 中可见, $E_p^{(0)}$ - β 曲线与 MC 方法计算结果不符, $E_{p,2}^{(0)}$ - β 曲线虽然有了很大改进, 在强耦合区补上了强耦合极限值:

$$E_p(\beta \approx 0, z = 0) = 1 - (\beta/2) \quad (29)$$

并显著地缩小了在 $\beta_0 = 1.4$ 附近的跳跃值, 但仍有跳跃, 显出一级相变点, 而其计算式子已经十分复杂。用单链试探作用量所得的 $E_p^{(1)}$ - β 曲线是光滑的, 与 MC 方法计算结果相符, 消除了用 S_0 得到的不正确的一级相变点。

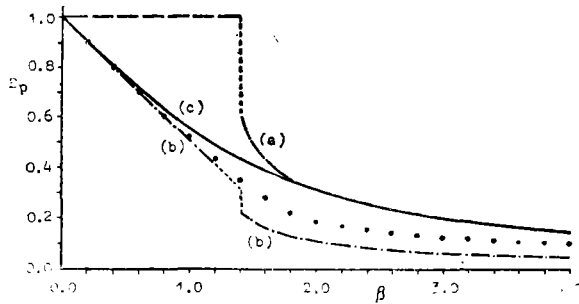


图 1 2 + 1 维 U(1) 格点规范场的相图

Fig.1 E_p vs β for 2 + 1 D U(1) LGT

实线(c)为 $E_p^{(1)}$ - β , 虚线(a)为 $E_p^{(0)}$ - β , 虚线(b)为 $E_{p,2}^{(0)}$ - β ,

实心点●为 MC 方法计算的结果, 取自参考文献[2]

图 2 分别给出近似自由能密度 $W^{(0)}$ 和 $W^{(1)}$ - β 的关系。可见用单链试探作用量所

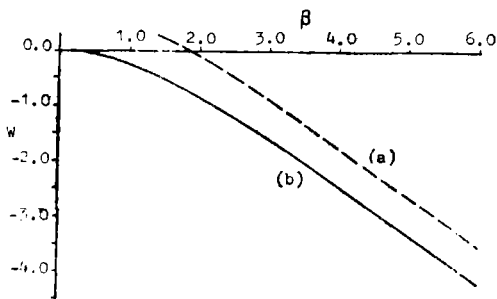


图 2 2 + 1 维 U(1) 格点规范场的近似自由能密度 W 与 β 的关系

Fig.2 Free energy per plaquette W vs β for 2 + 1 D U(1) LGT

(a) 单链试探作用量计算的自由能密度 $W^{(0)}$

(b) 单链试探作用量计算的自由能密度 $W^{(1)}$

得的自由能密度 $W^{(1)}$ 总比用单链试探作用量所得的 $W^{(0)}$ 要小, 即更接近准确的自由能密度的值。说明了单元格试探作用量计算的序参量与MC方法计算相符的原因。因此, 本文的计算证实了2 + 1 维U(1)格点规范理论是禁闭的。

参 考 文 献

- 1 Wilson K. Phys Rev D, 1974, 10: 2445
- 2 Bhanot G, Creutz M. Phys Rev D, 1980, 21: 2892
- 3 DeGrand T, Toussaint D. Phys Rev D, 1980, 22: 2478
- 4 Zheng Xi te, Tan Zu guo, Wang Jie. Nucl Phys B, 1987, 287:171
- 5 吴济民, 赵佩英. 高能物理与核物理, 1986, 10: 297
- 6 Batrouni G. Nucl Phys B, 1982, 208: 467

Phase Diagram of U(1) Lattice Gauge Theory in 2+1 Dimensions

Liu Jinming Gong Di*

Abstract The phase diagram of U(1) lattice gauge theory in 2+1 dimensions is studied by using variational method with one plaquette trial action. The result is in good agreement with those predicted by the MC method, [which shows that the U(1) theory in 2+1 D has only a single, confining phase.

Keywords lattice gauge theory, U(1) group

* Department of Physics