中山大学学报（自然科学版）
第30卷　第1期　ACTA SCIENTIARUM NATURALIUM　Vol 30 №.1
1991年　UNIVERSITATIS SUNYATSENI　1991

·研究简报·

对角型非一致椭圆组广义解的边界Hölder 连续性

梁鎏廷

（数学系）

摘　要

证明一类对角型非一致椭圆型方程组广义解的边界 Hölder 连续性，同时还给出关于解梯度的逆Hölder不等式。

关键词　对角型，非一致椭圆组，广义解，边界Hölder连续性，逆Hölder不等式

设G是n维欧氏空间E^n中的有界区域，设$a^{\alpha\beta}(x)$在G为可测，满足如下的条件：存在非负函数$\mu(x)\geqslant\lambda(x)$，$\lambda^{-1}(x)\in L_t(G)$，$\mu(x)\in L_s(G)$，$1/s+1/t<2/n$，使成立

$$\left.\begin{aligned}
&a^{\alpha\beta}(x)\xi^\alpha\xi^\beta\geqslant\lambda(x)|\xi|^2,\quad |a^{\alpha\beta}(x)|\leqslant\mu(x)\\
&a^{\alpha\beta}(x)\xi^\alpha\eta^\beta\leqslant\Lambda(a^{\alpha\beta}(x)\xi^\alpha\xi^\beta)^{\frac{1}{2}}(a^{\alpha\beta}(x)\eta^\alpha\eta^\beta)^{\frac{1}{2}}\\
&\|\lambda^{-1}\|_{L_t(G)}+\|\mu\|_{L_s(G)}\leqslant\Lambda,\quad(\Lambda=\text{const})\\
&\sup_{x_0\in G,\,\rho\leqslant\operatorname{diam}G}\left(\frac{1}{\rho^n}\int_{G\cap B(x_0,\rho)}\lambda^{-t}\mathrm{d}x\right)^{\frac{1}{t}}\cdot\left(\frac{1}{\rho^n}\int_{G\cap B(x_0,\rho)}\mu^s\mathrm{d}x\right)^{\frac{1}{s}}\leqslant\Lambda,
\end{aligned}\right\}\qquad(1)$$

其中，$B(x_0,\rho)=\{|x-x_0|<\rho\}$，$\overset{\circ}{W}{}^1_2(a,G)$记$C^1_c(G)$依下面范数完备化作成的加权Соболев空间

$$\|u\|_{\overset{\circ}{W}{}^1_2(a,G)}=\left\{\int_G a^{\alpha\beta}(x)u_{,\alpha}u_{,\beta}\mathrm{d}x\right\}^{\frac{1}{2}}\qquad\left(u_{,\alpha}=\frac{\partial u}{\partial x^\alpha}\right)$$

设

$u\in\left[\overset{\circ}{W}{}^1_2(a,G)\cap L_\infty(G)\right]^N$满足方程组

$$\int_G\left\{\varphi^i_{,\alpha}a^{\alpha\beta}(x)u^i_{,\beta}+\varphi^iB_i(x,u,\nabla u)\right\}\mathrm{d}x=0,\quad\forall\varphi\in\left[\overset{\circ}{W}{}^1_2(a,G)\cap L_\infty(G)\right]^N\qquad(2)$$

其中，$u\in\left[W^1_2(a,G)\cap L_\infty(G)\right]^N$，$B_i(x,u,\xi)$　$(i=1,2,\cdots,N)$在$G\times E^N\times E^{nN}$上定义，当x固定时关于u,ξ为连续，当u,ξ固定时关于x为可测，并且设

注　本文1988年9月10日收到

$$\left.\begin{array}{l}(\sum_i |B_j(x,u,\nabla u|^2)^{1/2} \leqslant a\lambda(x)|\nabla u|^2 + b(x), \\ \quad a\text{为非负常数，} b(x)\epsilon L_s(G)\text{且}\|b(x)\|_{L_s(G)} \leqslant \Lambda\end{array}\right\} \tag{3}$$

简记 $M = \operatorname{vrai}_G \max|u|$，$v = |u|^2 = \sum_i |u^i|^2$，$G(\rho) = G\cap B(x_0,\rho)$，

$A(k,\rho) = G(\rho)\cap\{v>k\}$.

引理 1 设$aM\leqslant 1$，那么存在常数$\theta\epsilon(0,1)$，只依赖于n，s,t,Λ和M，使得只要 mes $A(k,\rho)\leqslant\theta\rho^n$，那么就有 mes $A(k+\frac{H}{2}+\frac{\rho^K}{4},\ \frac{\rho}{2})=0$，其中，$K=1-\frac{n}{2s}-\frac{n}{2t}>0$，

$H=\left(\frac{1}{\theta\rho^n}\int_{A(k,\rho)}|v-k|^{l^*}\mathrm{d}x\right)^{\frac{1}{l^*}}\qquad \frac{1}{l^*}=\frac{1}{2}\left(1-\frac{1}{s}\right)$.

证明 设 $\zeta\epsilon\mathring{W}_2^1(a,G)\cap L_\infty(G)$，$\zeta\geqslant 0$。置$\varphi^i=\zeta u^i$ $(i=1,2,\cdots N)$，用这样的φ作试验函数，代入(2)，利用$aM\leqslant 1$和条件(1)、(3)，即得

$$\int_G\left\{\frac{1}{2}\zeta_{,\alpha}\, a^{\alpha\beta}(x)v_{,\beta}-\zeta b(x)M\right\}\mathrm{d}x\leqslant 0 \tag{4}$$

设 $h(r)$是r的逐段为线性的连续函数，满足 $h(r)=1$ 当$r\leqslant\rho_1$；$h(r)=0$ 当 $r\geqslant\rho_0$（其中 $\frac{\rho}{2}\leqslant\rho_1<\rho_0\leqslant\rho$）对任何$k\geqslant 0$，$\zeta=h^2(|x-x_0|)\max(v-k,0)\epsilon\mathring{W}_2^1(a,G)\cap L_\infty(G)$.将它代入(4)，给出

$$\int_{A(k,\rho_0)}\zeta^2 a^{\alpha\beta}(x)v_{,\alpha}v_{,\beta}\mathrm{d}x\leqslant C\Big\{(\rho_0-\rho_1)^{-2}\int_{A(k,\rho_0)}\mu(v-k)^2\mathrm{d}x + \int_{A(k,\rho_0)}h^2 b(x)(v-k)\mathrm{d}x\Big\} \tag{5}$$

其中，$C=C(n,M,\Lambda)$，$A(k,\rho_0)$是积分的有效域。

借助$\mathring{W}_2^1(a,G)$中的嵌入定理和Young不等式，由(5)进一步得

$$\|(v-k)\|_{L_l(A(k,\rho_1))}\leqslant C\Big\{(\rho_0-\rho_1)^{-1}\rho_0^{1-k}\|v-k\|_{L_{l^*}(A(k,\rho_0))} + \operatorname{mes}^{\frac{1}{l}+\frac{2K}{n}}A(k,\rho_0)\Big\} \tag{6}$$

其中，$\frac{1}{l}=\frac{1}{2}(1+\frac{1}{t})-\frac{1}{n}$。设$\rho\leqslant 1$，对$v=0,1,2,\cdots$置

$$\rho_\nu=\frac{1}{2}(\rho+\frac{\rho}{2^\nu}),\quad k_\nu=k+\frac{H}{2}+\frac{\rho^K}{4}-\frac{1}{2^\nu}(\frac{H}{2}+\frac{\rho^K}{4}),$$

$$A_\nu=\operatorname{mes}A(k_\nu,\rho_\nu),\qquad I_\nu=\int_{A(k_\nu,\rho_\nu)}|v-k_\nu|^{l^*}\mathrm{d}x.$$

(6)中常数$C>0$和v,k,ρ_0,ρ_1无关，分别用k_ν取代k，用ρ_ν、$\rho_{\nu+1}$取代ρ_0、ρ_1，由(6)给出

$$I_{\nu+1}^{1/l^*}+(k_{\nu+1}-k_\nu)A_{\nu+1}^{1/l^*}\leqslant 2\|(v-k_\nu)\|_{L_{l^*}(A(k_\nu,\rho_{\nu+1}))}$$
$$\leqslant CA_\nu^{1/l^*-1/l}\left\{2^{\nu+2}\rho^{-K}I_\nu^{1/l^*}+A_\nu^{1/l+2K/n}\right\}\tag{7}$$

根据引理 1 的条件，$A_0\leqslant\theta\rho^n$，$I_0\leqslant(H+\frac{1}{2}\rho^K)^{l*}\theta\rho^n$。只要取

$$4\varepsilon^{\frac{K}{n}}=1,\qquad 16C\theta^{\frac{K}{n}}\leqslant\frac{1}{2}\varepsilon^{1/l*},\qquad 8C\theta^{\frac{2K}{n}}\leqslant\frac{1}{2}\varepsilon^{1/l*}$$

（C为(6)中出现的常数），根据(7)，利用归纳法可证：

$$A_\nu\leqslant\varepsilon^\nu\theta\rho^n,\quad I_\nu\leqslant\varepsilon^\nu(H+\frac{\rho^K}{2})^{l*}\theta\rho^n,\quad \nu=1,2,\cdots$$

命$\nu\to\infty$得$A_\nu\to 0$，后者隐含了欲证之断言。

称G为$S(\tilde{\alpha},R)$类区域，如果存在$\tilde{\alpha}\epsilon(0,1),R>0$使

$$\mathrm{mes}B(x_0,\rho)\backslash G\geqslant\tilde{\alpha}\,\mathrm{mes}B(x_0,\rho)\qquad\forall x_0\,\overline{\epsilon}\,G,\quad \rho\leqslant R.$$

定理 1　设G是$S(\tilde{\alpha},R)$类区域，设$u\epsilon[\mathring{W}_2^1(a,G)\cap L_\infty(G)]^N$满足方程组(2)并且$aM\leqslant 1$。那么存在常数$\eta\epsilon(\frac{1}{4},1)$和$C>0$只依赖于$n,s,t,M,\Lambda$和$\tilde{\alpha}$，使对任意$x_0\epsilon\partial G$（$G$的边界）和$4\rho\leqslant\rho_0\leqslant\min(R,1)$，

$$\operatorname*{vrai\,max}_{G(\rho)}|u(x)-u(x_0)|\leqslant\left(\frac{\rho}{\rho_0}\right)^{\frac{1}{2}K\log_4(\frac{1}{\eta})}\left[C+\log_4\left(\frac{\rho_0}{\rho}\right)\right]^{\frac{1}{2}}\rho_0^{K/2}\tag{8}$$

证明　对$\nu=0,1,2,\cdots\cdots$置$\rho_\nu=\rho_0/4^\nu$，我们要证存在$\eta\epsilon(\frac{1}{4},1)$和$C>0$使或者

(i)$\operatorname*{vrai\,max}_{G(\rho_{\nu-1})}v\leqslant C\rho_\nu^K$；或者(ii)$\operatorname*{vrai\,max}_{G(\rho_\nu)}v\leqslant\eta^K\operatorname*{vrai\,max}_{G(\rho_{\nu-1})}v+\rho_\nu^K$。设正整数$\tau$待定，不妨认为出现在(i)中的$C\geqslant\max\left\{M^2/\rho_0^K,\ 2^{\tau+1}\right\}$。那么(i)对$\nu=0$成立。假设对某个$\nu\geqslant 1$断言(i)不真，那么我们有

$$\rho_\nu^K\leqslant\frac{1}{C}\operatorname*{vrai\,max}_{G(\rho_\nu)}v\leqslant 2^{-(\tau+1)}\operatorname*{vrai\,max}_{G(\rho_\nu)}v$$

对$i=0,1,2,\cdots\tau+1$，置$k_i=\mu_1-\mu_1/2^i$，$\mu_1=\operatorname*{vrai\,max}_{G(\rho_{\nu-1})}v$。由于设$G$为$S(\tilde{\alpha},R)$类区域，对任何$x_0\epsilon\partial G$和$k\geqslant 0$，$\mathrm{mes}\,B(x_0,\rho)\cap\{v\leqslant k\}\geqslant\tilde{\alpha}\,\mathrm{mes}B(x_0,\rho)$。应用Morrey[1]引理Ⅰ*，给出

$$(k_{i+1}-k_i)\mathrm{mes}^{1-\frac{1}{n}}A(k_{i+1},2\rho_\nu)\leqslant C(n,\tilde{\alpha})\int_{D_i}|\nabla v|\mathrm{d}x$$
$$\leqslant C(n,\tilde{\alpha})\mathrm{mes}^{1-\frac{1}{m}}D_i\left\|\lambda^{-1}\right\|_{L_t(G(2\rho_\nu))}^{1/2}\left(\int_{A(k_i,2\rho_\nu)}a^{\alpha\beta}v_{,\alpha}v_{,\beta}\mathrm{d}x\right)^{1/2}\tag{9}$$

其中，$D_i=A(k_i,2\rho_\nu)\backslash A(k_{i+1},2\rho_\nu)$，$\frac{1}{m}=\frac{1}{2}(1+\frac{1}{t})$。根据（6），利用条件（1）、（3），可对上式右端作出估计，结果如下：

$$(k_{i+1}-k_i)\mathrm{mes}^{1-\frac{1}{n}}A(k_{i+1},2\rho_\nu)\leqslant C\,\mathrm{mes}^{1-\frac{1}{m}}D_i\Big\{\mathrm{mes}^{\frac{1}{l}+\frac{2K}{n}}A(k_i,4\rho_\nu)$$

$$+(2\rho_\nu)^{-1}(4\rho_\nu)^{\frac{n}{2}(\frac{1}{s}+\frac{1}{t})}\|v-k_i\|_{L_{l^*}(A(k_i,4\rho_\nu))}\Big\} \tag{10}$$

在$G(4\rho_\nu)$上，$v-k_\nu\leqslant\mu_1/2^\nu$并且$A(k_{\tau+1},2\rho_\nu)\subset A(k_{i+1},2\rho_\nu)$，由(10)式进一步可得

$$(\mu_1/2^{i+1})\ \mathrm{mes}^{1-\frac{1}{n}}A(k_{\tau+1},2\rho_\nu)\leqslant C\,\mathrm{mes}^{1-\frac{1}{m}}D_i\Big(\frac{\mu_1}{2^i}+\frac{\mu_1}{2^{\tau+1}}\Big)\rho_\nu^{\frac{n}{l^*}-K}$$

$$\tau\,\mathrm{mes}^{(1-\frac{1}{n})(1-\frac{1}{m})^{-1}}A(k_{\tau+1},2\rho_\nu)\leqslant C(\sum_{i=0}^{\tau}\mathrm{mes}\,D_i)\rho_\nu^{\frac{n}{l^*}-K}\leqslant C\,\rho_\nu^{(n-1)(1-\frac{1}{m})^{-1}} \tag{11}$$

选择τ足够大，由(11)式即得 $\mathrm{mes}A(k_{\tau+1},2\rho_\nu)\leqslant\theta(2\rho_\nu)^n$ 其中 $\theta>0$ 为引理1中出现的常数。应用引理1，即得

$$\mathrm{mes}\ A(k_{\tau+1}+\frac{H}{2}+\frac{(2\rho_\nu)^K}{4},\rho_\nu)=0,\ H=\Big(\frac{1}{\theta(2\rho_\nu)^n}\int_{A(k_{\tau+1},2\rho_\nu)}|v-k_{\tau+1}|^{l^*}\mathrm{d}x\Big)^{1/l^*}$$

从而 $$\underset{G(\rho_\nu)}{\mathrm{vrai\ max}}\ v\leqslant(1-\frac{1}{2^{\tau+2}})\mu_1+\rho_\nu^K.$$

取$\eta^K=(1-2^{-(\tau+2)})>4^{-K}$，根据$\mu_1$的定义上式隐含了(ii)。对任何$\rho\leqslant\rho_0/4$，可找到$\nu$使$\rho\leqslant\rho_\nu<4\rho$。从而（利用(i)(ii)迭代）

$$\underset{G(\rho)}{\mathrm{vari\ max}}\ v\leqslant\underset{G(\rho_\nu)}{\mathrm{vrai\ max}}\ v\leqslant\eta^{\nu K}(C+\nu)\rho_0^K$$

$$\leqslant\Big(\frac{\rho}{\rho_0}\Big)^{K\log_4(\frac{1}{\eta})}\Big[C+\log_4(\Big(\frac{\rho_0}{\rho}\Big)\Big]\rho_0^K \tag{1)2}$$

由于设$u\in\overset{\circ}{W}{}_2^1(a,G)$，$v=|u|^2$，(12)式隐含了（8）。证讫。

定理2 设G是$S(\widetilde{\alpha},R)$类区域，设 $u\in[\overset{\circ}{W}{}_2^1(a,G)\cap L_\infty(G)]^N$ 满足方程组（2）并且$2aM<1$，那么存在常数$\delta>0$，$C>0$仅依赖于$n,s,t,a,A,M,\widetilde{\alpha}$，$R$和diam G，使

$$\Big[⨍_G(\lambda(x)|\nabla u|^2)^{1+\delta}\mathrm{d}x\Big]^{\frac{1}{1+\delta}}\leqslant C⨍_G\lambda(x)|\nabla u|^2\mathrm{d}x+(⨍_G\,b(x)^{1+\delta}\mathrm{d}x)^{\frac{1}{1+\delta}} \tag{13}$$

其中，$⨍_e f(x)\mathrm{d}x=(\mathrm{mes}\ \ e)^{-1}\int_e f(x)\mathrm{d}x$。

证明 设$B(\rho)\subset G$，记$u_\rho^i=⨍_{B(\rho)}u^i\mathrm{d}x$。设$h(x)$是证明引理1出现的函数，只是现在取$\rho_1=\rho/2,\rho_0=\rho$.取$\varphi^i=h(x)(u^i-u_\rho^i)$代入(2)，和推导(5)一样，得

$$⨍_{B(\frac{\rho}{2})}\lambda(x)|\nabla u|^2\mathrm{d}x\leqslant C\Big\{\frac{1}{\rho^2}⨍_{B(\rho)}\mu(x)|u-u_\rho|^2\mathrm{d}x+⨍_{B(\rho)}b(x)\mathrm{d}x\Big\} \tag{14}$$

其中，$C=C(n,\Lambda,a,M)$，利用Poincaré不等式，我们有

$$
\begin{aligned}
&⨍_{B(\rho)}\mu(x)|u-u_\rho|^2\mathrm{d}x \leqslant C(n,m,s)\left(⨍_{B(\rho)}\mu^s\mathrm{d}x\right)^{\frac{1}{s}}\left(⨍_{B(\rho)}(\rho|\nabla u|)^{m\theta}\mathrm{d}x\right)^{\frac{1}{m\theta}}\\
&\leqslant C\left(⨍_{B(\rho)}\mu^s\mathrm{d}x\right)^{\frac{1}{s}}\left(⨍_{B(\rho)}\lambda^{-t}\mathrm{d}x\right)^{\frac{1}{t}}\left(⨍_{B(\rho)}(\rho^2\lambda(x)|\nabla u|^2)^\theta\mathrm{d}x\right)^{\frac{1}{\theta}}\\
&\leqslant C\Lambda\left(⨍_{B(\rho)}(\rho^2\lambda(x)|\nabla u|^2)^\theta\mathrm{d}x\right)^{\frac{1}{\theta}}
\end{aligned}
\tag{15}
$$

$$
\theta=\left(1+\frac{1}{t}\right)\left[1+\frac{1}{t}+\left(\frac{2}{n}-\frac{1}{s}-\frac{1}{t}\right)\right]^{-1}\in(0,1),\quad \frac{1}{m}=\frac{1}{2}\left(1+\frac{1}{t}\right).
$$

联合(14)、(15)，成立[2]

$$
\begin{aligned}
\left(⨍_{B(\rho/2)}(\lambda(x)|\nabla u|^2)^{1+\delta}\mathrm{d}x\right)^{\frac{1}{1+\delta}} \leqslant C\Big\{&⨍_{B(\rho)}\lambda(x)|\nabla u|^2\mathrm{d}x\\
&+\left(⨍_{B(\rho)}b(x)^{1+\delta}\mathrm{d}x\right)^{\frac{1}{1+\delta}}\Big\}
\end{aligned}
\tag{16}
$$

当$x_0\in\partial G$时，类似(16)的估计对$G(\rho)=G\cap B(x_0,\rho)$也是成立的。只是证明略有修改，即取$\varphi^i=h^2(|x-x_0|)u^i$并且代替利用Poincaré不等式，现在要利用文〔2〕引理5.1。然后再利用有限覆盖定理导出欲证的(13)。证毕。

参 考 文 献

〔1〕Morrey C B, *Math. Z.*, 72 (1959), 146～164

〔2〕Giaquinta M, *Ann. Math. Studies*, 105 (1983)

The Boundary Hölder Continuity of Generalized Solutions of Non-uniformly Elliptic Systems in Diagonal Form

*Liang Xiting**

Abstract

The boundary Hölder continuity of generalized solutions of a class of non-uniformly elliptic systems in diagonal form is proved. A reverse Hölder inequality is given for the gradient of the solution.

Keywords non-uniformly elliptic system, boundary Hölder continuity, reverse Hölder inequality

* Department of Mathematics