第31卷 第1期 1992年
中山大学学报（自然科学版）
ACTA SCIENTIARUM NATURALIUM UNIVERSITATIS SUNYATSENI
Vol.31 No.1 1992

·研究简报·

不可微泛函拟极小问题解梯度的Hölder连续性

梁鉴廷
（数学系）

摘　要　本文给出一类不可微泛函拟极小问题解梯度的Hölder连续性的证明。

关键词　不可微泛函、拟极小、梯度，Hölder连续性

设$n\geqslant 2$，$G\subset\subset E^n$为开集。考虑泛函

$$I(u,G)=\int_G F(x,u,\nabla u)\mathrm{d}x,\quad u\in W^1_p(G) \tag{1}$$

其中，$F(x,u,\xi)$为在$G\times E^1\times E^n$上定义的Carathéodory函数并且F关于ξ的二阶偏导数$F_{\xi_\alpha\xi_\beta}(x,u,\xi)$存在。此外设下面的结构条件满足：

$$(\varepsilon+|\xi|^2)^{p/2}-(b|u|^{\bar q}+C)\leqslant F(x,u,\xi)\leqslant k(\varepsilon+|\xi|^2)^{p/2}+b|u|^{\bar q}+C \tag{2}$$

$$F_{\xi_\alpha\xi_\beta}(x,u,\xi)\zeta^\alpha\zeta^\beta\geqslant k^{-1}(\varepsilon+|\xi|^2)^{(p-2)/2}|\zeta|^2 \tag{3}$$

$$F_{\xi_\alpha\xi_\beta}(x,u,\xi)|\leqslant k(\varepsilon+|\xi|^2)^{(p-2)/2} \tag{4}$$

$$|F(x,u,\xi)-E(y,v,\xi)|\leqslant k(|x-y|^\gamma+|u-v|^\sigma)(\varepsilon+|\xi|^2)^{p/2} \tag{5}$$

其中，$1<p<2$，$p\leqslant\bar q<np/(n-p)$，$k\geqslant 1$，$0<\gamma$、$\sigma\leqslant 1$为常数和$\varepsilon$无关，$\varepsilon\in(0,1]$。

如果存在Q使对任何$B(x_0,R)=\{|x-x_0|<R\}\subset G$和任意的$\varphi\in\mathring{W}^1_p(B(x_0,R))$成立

$$I(u,\operatorname{supp}\varphi)\leqslant QI(u+\varphi,\operatorname{supp}\varphi)$$

那么称u为$I(u,G)$的局部拟极小或局部Q-极小。

〔1〕中对$p\geqslant 2$的情形证明$I(u,G)$的局部极小解梯度的Hölder连续性，〔2〕中则对$p=2$的情形证明$I(u,G)$的$(1+CR^{2\mu})$-极小解的梯度的Hölder连续性。我们只限于$Q=1+CR^{2\mu}(C>,\mu>0$是常数)。

定理　设$1<p<2$，设$u=u_\varepsilon\in W^1_p(G)$是$I(u,G)$局部$(1+CR^{2\mu})$-极小，设$F$满足(2)～(5)。如果$u$在$G$局部地有和$\varepsilon$无关的界，那么$u$的梯度$\nabla u$在$G$内局部Hölder连续并且在任何紧子集$G'\subset\subset G$上$\nabla u$的Hölder常数和Hölder指数与$\varepsilon$无关。

证明　设$x_0\in G'\subset\subset G$，$B(x_0,2R)\subset G$为任意。设$w$满足$w-u\in\mathring{W}^1_p(B(x_0,R))$并使

本文1989年5月10日收到
• 中山大学科研基金资助课题

(C)1994-2019 China Academic Journal Electronic Publishing House. All rights reserved. http://www.cnki.net

$$I_0(w,B(x_0,R))=\int_{B(x_0,R)}F(x_0,u_{x_0,R},\nabla w)\mathrm{d}x=\min \tag{6}$$

其中，$u_{x_0,R}=\fint_{B(x_0,R)}u\mathrm{d}x$是$u$在$B(x_0,R)$上的平均值。那么$w$满足Euler方程

$$\int_{B(x_0,R)}F_{\xi^\alpha}(x_0,u_{x_0,R},\nabla w)\frac{\partial\varphi}{\partial x^\alpha}\mathrm{d}x=0,\quad \forall\varphi\in\mathring{W}_p^1(B(x_0,R)) \tag{7}$$

由于条件(3)、(4)，根据〔3〕命题3.3，存在常数C>0和ε、w、R无关并与x_0无关（由于$x_0\in G'$）使

$$\|(\varepsilon+|\nabla w|^2)\|^{p/2}_{L_\infty(B(x_0,R/2))}\leqslant CR^{-n}\int_{B(x_0,R)}(\varepsilon+|\nabla w|^2)^{p/2}\mathrm{d}x \tag{8}$$

$$\int_{B(x_0,\rho)}(\varepsilon+|\nabla w|^2)^{p/2}\mathrm{d}x\leqslant C(\rho/R)^n\int_{B(x_0,R)}(\varepsilon+|\nabla w|^2)^{p/2}\mathrm{d}x,\quad \rho\leqslant R \tag{9}$$

已设u在G内局部地有和ε无关的界，下面不妨把u看作在G上有和ε无关的界(否则用G的紧子域取代G)，这样可把(2)中出现的$b|u|^{\tilde{q}}$的项合并到C中，这相当于取$b=0$于是

$$\int_{B(x_0,R)}[(\varepsilon+|\nabla w|^2)^{p/2}-C]\mathrm{d}x\leqslant I_0(w,B(x_0,R))\leqslant I_0(u,B(x_0,R))$$

$$\leqslant\int_{B(x_0,R)}[k(\varepsilon+|\nabla u|^2)^{p/2}+C]\mathrm{d}x \tag{10}$$

(10)的得到用到了(2)和(6)。可以证明$u\in W_p^1(G)$作为$I(u,G)$的$(1+CR^{2\mu})$-极小在G内局部Hölder连续，且Hölder指数λ可任意接近1。并且当限制$x_0\in G'$时，u在$\bar{G}'$的Hölder常数和x_0,ε无关。更准确地，存在常数C和ε,u,R以及x_0都无关（由于$x_0\in G'$之故），使

$$\operatorname*{osc}_{B(x_0,R)}u\leqslant CR^\lambda\text{和}\int_{B(x_0,R)}|\nabla u|^p\mathrm{d}x\leqslant CR^{n-p+p\lambda} \tag{11}$$

根据〔3〕引理5.1和命题4.3，对w还成立

$$\operatorname*{osc}_{B(x_0,R)}w\leqslant\operatorname*{osc}_{B(x_0,R)}u\leqslant CR^\lambda \tag{12}$$

$$\operatorname*{osc}_{B(x_0,\rho)}\nabla w\leqslant C\left(\frac{\rho}{R}\right)^\eta\|\nabla w\|_{L_\infty(B(x_0,R/2))},\ \rho\leqslant R/4 \tag{13}$$

其中，常数$C>0$，$0<\eta<1$和ε,w,ρ,R以及x_0无关。由于$w-u\in\mathring{W}_p^1(B(x_0,R))$，由(12)继续得

$$|w-u_{x_0,R}|\leqslant|u-w|+|u-u_{x_0,R}|\leqslant CR^\lambda \tag{14}$$

根据(3)和$1<p<2$的假定，还有

$$F(x_0,u_{x_0,R},\nabla u)-F(x_0,u_{x_0,R},\nabla w)-F_{\xi^\alpha}(x_0,u_{x_0,R},\nabla w)\frac{\partial}{\partial x^\alpha}(u-w)$$

$$\geqslant\int_0^1\int_0^1(\varepsilon+|st\nabla u+(1-st)\nabla w|^2)^{(p-2)/2}\mathrm{d}s\,\mathrm{d}t|\nabla(u-w)|^2$$

(C)1994-2019 China Academic Journal Electronic Publishing House. All rights reserved. http://www.cnki.net

$$\geqslant (\varepsilon+|\nabla u|^2+|\nabla w|^2)^{(p-2)/2}|\nabla(u-w)|^2 \tag{15}$$

在(7)中取$\varphi=w-u\in\mathring{W}_p^1(Bx_0,R))$，利用$u$是$I(u,G)$的$(1+CR^{2\mu})$—极小，由(15)继续得

$$\int_{B(x_0,R)}(\varepsilon+|\nabla u|^2+|\nabla w|^2)^{(p-2)/2}|\nabla(u-w)|^2dx\leqslant I_0(u,B(x_0,R))$$

$$-I_0(w,B(x_0,R))\leqslant I_0(u,B(x_0,R))-I(u,B(x_0,R))+I(u,B(x_0,R))$$
$$-I(w,B(x_0,R))+I(w,B(x_0,R))-I_0(w,B(x_0,R))$$
$$\leqslant\int_{B(x_0,R)}k(|x-x_0|^\gamma+|u-u_{x_0,R}|^\sigma)(\varepsilon+|\nabla u|^2)^{p/2}dx$$
$$+\int_{B(x_0,R)}k(|x-x_0|^\gamma+|w-u_{x_0,R}|^\sigma)(\varepsilon+|\nabla w|^2)^{p/2}dx$$
$$+CR^{2\mu}\int_{B(x_0,R)}F(x,w,\nabla w)dx$$

联合(10)、(11)、(12)、(14)和(16)，给出

$$\int_{B(x_0,R)}(\varepsilon+|\nabla w|^2)^{p/2}dx\leqslant CR^{n-p+p\lambda},$$

$$\int_{B(x_0,R)}(\varepsilon+|\nabla u|^2+|\nabla w|^2)^{(p-2)/2}|\nabla(u-w)|^p dx$$
$$\leqslant CR^\tau\left[\int_{B(x_0,R)}(\varepsilon+|\nabla u|^2+|\nabla w|^2)^{p/2}dx+R^n\right]$$
$$\leqslant CR^{n+\tau-p+p\lambda},\quad \tau=\min\{\gamma,\sigma\lambda,2\mu\}>0 \tag{17}$$

其中的常数C和ε,u,w,R以及x_0无关，再由Hölder不等式，有

$$\int_{B(x_0,\rho)}|\nabla u-\nabla w|dx$$
$$\leqslant\left[\int_{B(x_0,\rho)}(\varepsilon+|\nabla w|^2)^{(p-2)/2}|\nabla(u-w)|^2dx\int_{B(x_0,\rho)}(\varepsilon+|\nabla w|^2)^{(2-p)/2}dx\right]^{1/2}$$
$$\leqslant CR^{(n+\tau-p+p\lambda)/2}\left(\int_{B(x_0,\rho)}(\varepsilon+|\nabla w|^2)^{p/2}dx\right)^{(2-p)/(2p)}\left(\int_{B(x_0,\rho)}dx\right)^{2/p}$$
$$\leqslant C\rho^{n/2}R^{(n+\tau-2+2\lambda)/2},\qquad \rho\leqslant R \tag{18}$$

$$\int_{B(x_0,\rho)}|\nabla u-\nabla w(x_0)|dx\leqslant\int_{B(x_0,\rho)}(|\nabla u-\nabla w|+|\nabla w-\nabla w(x_0)|)dx$$
$$\leqslant C\left[\rho^{n/2}R^{(n+\tau-2+2\lambda)/2}+(\rho/R)^{n+\eta}R^{n-p+p\lambda}\right],\quad \rho\leqslant R/4 \tag{19}$$

一开始就取$\lambda<1$充分接近1，使$\tau/2-1+\lambda>p(1-\lambda)n/(2\eta)$，那么存在$\theta>0$使

$$\tau/2-(1-\lambda)>\theta n/2>p(1-\lambda)n/(2\eta).$$

限制$R_0\leqslant1$满足$R_0^\theta\leqslant1/4$，那么当$\rho\leqslant R_0^{1+\theta}$时，可以找到$R\leqslant R_0\leqslant1$，使$\rho=R^{1+\theta}\leqslant R/4$，根据(19)，成立

(C)1994-2019 China Academic Journal Electronic Publishing House. All rights reserved. http://www.cnki.net

$$\rho^{n/2} R^{(n+\tau-2+2\lambda)/2} = \rho^{n+(\tau/2-1+\lambda-\theta n/2)/(1+\theta)},$$

$$(\rho/R)^{n+\eta} R^{n-p+p\lambda} = \rho^{n+(\theta\eta-p+p\lambda)/(1+\theta)},$$

$$\int_{B(x_0,\rho)} |\nabla u - \nabla w(x_0)| \mathrm{d}x \leqslant C(\rho/R_0)^{n+\nu} R_0^{n+\nu}, \qquad \rho \leqslant R_0^{1+\theta} \tag{20}$$

$$(1+\theta)\nu = \min\{\tau/2-1+\lambda-\theta n/2, \theta\eta-p+p\lambda\} > 0$$

而当 $R_0^{1+\theta} \leqslant \rho \leqslant R_0$时，成立

$$\int_{B(x_0,\rho)} |\nabla u| \mathrm{d}x \leqslant \left(\int_{B(x_0,\rho)} |\nabla u|^p \mathrm{d}x\right)^{1/p} \left(\int_{B(x_0,\rho)} \mathrm{d}x\right)^{1-1/p}$$

$$\leqslant CR_0^{n-1+\lambda} \leqslant CR^{n-1+\lambda}\left(\rho/R_0^{1+\theta}\right)^{n+\nu} \tag{21}$$

联合(20)、(21)并应用[4]的结果，即得

$$|\nabla u(x) - \nabla u(x_0)| \leqslant CR_0^{-\nu-(1-\lambda)-(n+\nu)\theta} |x-x_0|^{\nu} \tag{22}$$

$$\forall x_0 \in G' \subset\subset G, \ |x-x_0| \leqslant R_0/2, \ B(x_0, 2R) \subset G$$

由于常数C和$\varepsilon, u, \rho, R_0$以及$x_0$无关，(22)隐含了$\nabla u$在$G$局部Hölder连续.回过头可取$\lambda=1$.然后出现在(22)中的$\nu$可取

$$(1+\theta)\nu = \min\{(\tau-\theta n)/2, \theta\eta\} > 0$$

定理证讫.

参考文献

1 Giaquinta M, Modica G. Manuscripta Math. 1986, 57: 55～99
2 Anzellotti G, Bollettino U M I. Ser 6, 1983, II-C, 195～212
3 Di Benedetto E. Nonlinear Analysis, TMA 1983, 7:827～850
4 Meyers N G. Proc Amer Math. Soc, 1964, 15: 717～721

On the Hölder Continuity of the Gradient of Solutions of Quasi-minima Problems for Non-differentiable Functionals

*Liang Xiting**

Abstrbct We prove the Hölder continuity of the gradient of solutions of a quasi-minima problem for non-differentiable functionals.

Keywords non-differentiable functional, quasi-minima, Gradient, Hölder continuity.

* Department of Mathematics

(C)1994-2019 China Academic Journal Electronic Publishing House. All rights reserved. http://www.cnki.net