中山大学学报（自然科学版）
第30卷 第2期 1991年
ACTA SCIENTIARUM NATURALIUM UNIVERSITATIS SUNYATSENI
Vol.30 №.2 1991

关 于 二 重 数

叶 述 武*

（中国科学院数学研究所）

摘 要

$a+bj$称为二重数，其中a，b是实数，$j^2=1$．本文着重论述二重数的概念、性质和方程 $z^n=a+bj$ 的根的问题．

关键词 二重数，零除数

关于二重数$a+bj$（a，$b\in R$，$j^2=1$），过去一些数学家曾经谈到过，但论述甚少。本文首先给出二重数的概念和一些性质，然后讨论方程$z^n=a+bj$的根的问题。

1 基本概念与代数性质

$a+be$称为超复数，其中a、b是实数，或者$e^2=1$，或者$e^2=0$。在$e^2=1$的情况，$a+be$称为二重数，当$e^2=0$，$a+be$称为对偶数。此两类数的加法由下式定义

$$(a_1+b_1e)+(a_2+b_2e)=(a_1+a_2)+(b_1+b_2)e.$$

二重数的乘法由下式定义

$$(a_1+b_1e)(a_2+b_2e)=(a_1a_2+b_1b_2)+(a_1b_2+a_2b_1)e.$$

而对偶数的乘法则由下式来定义

$$(a_1+b_1e)(a_2+b_2e)=a_1a_2+(a_1b_2+a_2b_1)e.$$

复数、二重数、对偶数也相应地称为椭圆型、双曲型和抛物型的复数。借助这些数可表示罗伯切夫斯基，黎曼和欧氏等三维空间的运动。

二重数和对偶数构成实数场上二维（以1及e为基）的结合—交换代数。它们与复数不同，含有零除数，且在二重数的代数内，所有零除数都是$a\pm ae$形。因为二重数代数可以分解为两个实数场的直和，所以二重数又称为可分裂的复数，二重数还有一个名称，则是Para复数。

把$a+bj$（$j^2=1$）看成是数，是有一番考虑的。从

$$\cos x=(e^{ix}+e^{-ix})/2,\quad \sin x=(e^{ix}-e^{-ix})/2i$$

$$\mathrm{ch}x=(e^x+e^{-x})/2,\quad \mathrm{sh}x=(e^x-{}^{-x})/2$$

本文1988年5月9日收到

* 中山大学数学系林和曾协助整理（1990年）

出发，考虑如何把ch$x$，sh$x$的e^x，e^{-x}改写成e^{jx}，e^{-jx}，使双曲函数更加和圆函数相似。考虑的结果初步确定要有$j^2=1$。

因为，照

$$\mathrm{ch}x=(e^{jx}+e^{-jx})/2,\quad \mathrm{sh}x=(e^{jx}-e^{-jx})/2j$$

的写法，当$j=1$

$$\mathrm{ch}x=(e^x+e^{-x})/2,\quad \mathrm{sh}x=(e^x-e^{-x})/2$$

这是原来的定义，当$j=-1$，新的公式仍给出上列两式。

再想到e^{ix}中的i，可以做成$a+bi$，所以我们继续研究了$a+bj$的运算，$a+bj$的几何表示法，以及零除数的发现等等，这些，都是二十年代末期的事了。

总而言之，从$x^2+1=0$产生i，从$x^2-1=0$产生j，有$e^{ix}=\cos x+i\sin x$，亦有$e^{jx}=\mathrm{ch}x+j\mathrm{sh}x$，援用欧氏几何有$x+iy=\rho(\cos\theta+i\sin\theta)$，援用明可夫斯基几何，亦有$x+yj=\rho(\mathrm{ch}\theta+j\mathrm{sh}\theta)$（$|x|>|y|$），所以本人曾称$i$为椭圆数，$j$为双曲数，最后还可把$f(x+iy)=P+iQ$，$P$、$Q$要满足$\frac{\partial^2u}{\partial x^2}+\frac{\partial^2u}{\partial y^2}=0$，和$f(x+jy)=P+jQ$，$P$、$Q$要满足$\frac{\partial^2u}{\partial x^2}-\frac{\partial^2u}{\partial y^2}=0$相比拟。

虽说复数与二重数有些地方可以相比拟，但亦有不同之处，首先谈谈代数方程的根的个数。

拿最简单的二次方程$z^2-1=0$来说，如果把z值限制在复数$a+bi$中，z就只能有$+1$，-1两值，也就是说方程$z^2-1=0$有两个根，但如果把z限制在$a+bj$二重数系内，那么除了$+1$，-1两根以外，还有$+j$，$-j$两根。一般说，在二重数系内这个二次方程就有4个根了。如果把z限制在$a+bj$数系内，并且a，b可以取复数值，可以证明n次方程可有n^2个根，而不是只有n个根。

二重数$k(1+j)$与$k'(1-j)$（k，k'是实数或复数）的乘积等于$kk'(1-j^2)=0$，而它们却没有一个是零，这种本身不为零而又是零的因子的数，叫做零除数。故二重数有零除数，这在实数和复数里面是没有的。下面引述零除数几个性质。

（1）任何$a+bj$乘以零除数，结果仍得零除数或零（a，b可实，可复）。

因$(a+bj)(1\pm j)=(a\pm b)(1\pm j)$，当$a\pm b=0$，则为0。

（2）几个因子之积为零除数，则至少有一个因子为零除数。

例如：若$(a+bj)(c+dj)=k(1+j)$，则$ac+bd=ad+bc$，从而$a(c-d)+b(d-c)=(a-b)(c-d)=0$，至少$a=b$或$c=d$，即至少有一因子为零除数。

（3）等式两边不能消去零除数。

例如：$(a+bj)(1+j)=(a+b)(1+j)$，如果消去$1+j$就会得到$a+bj=a+b$，于理不合。

（4）几个因子之积为零，不必有一个因子为零。

我们有如下的定理：

定理 n次代数方程$f(z)=0$有n^2个根，而且在一般情况下有$n!$个分解为n个一次因子的乘积的方法。

证明　写$f(z)=u(x,y)+jv(x,y)=0$（x，y可为复数）则

$$u(x,y)=0,\ v(x,y)=0$$

都是n次方程，有n^2组(x,y)的根，可以组成$f(z)=0$的n^2个形如$x+yj$的根，即得定理前半部的证明，但此法不能用于证明$f(z)=\bar{u}(x,y)+i\bar{v}(x,y)=0$有$n^2$个根，因为$z=x+iy$中的$x$，$y$限定要取实值。

因子分解有$n!$个方法的证明从略，只举一个例子作为说明。

给定方程$f(z)\equiv z(z-1)(z-2)=0$，则已有0，1，2三根为已知，尚有6根，若以0，1配对，得方程组

$$z-0=k(1+j),\ z-1=k'(1-j);$$

$$z-0=k(1-j),\ z-1=k'(1+j);$$

解之，先得$z_4=\frac{1}{2}(1+j)$后得$z_5=\frac{1}{2}(1-j)$，再取配对0，2和1，2便得$z_6=1+j$；$z_7=1-j$，$z_8=\frac{1}{2}(3+j)$，$z_9=\frac{1}{2}(3-j)$。适当配合，便得

$$f_2=z(z-\frac{3}{2}+\frac{1}{2}j)(z-\frac{3}{2}-\frac{1}{2}j);\quad f_3=(z-\frac{1}{2}+\frac{1}{2}j)(z-\frac{1}{2}-\frac{1}{2}j)(z-2);$$

$$f_4=(z-\frac{1}{2}+\frac{1}{2}j)(z-\frac{3}{2}+\frac{1}{2}j)(z-1-j);\quad f_5=[z-(1-j)][z-1][z-(1+j)];$$

$$f_6=[z-(1-j)][z-(\frac{3}{2}+\frac{1}{2}j)][z-(\frac{1}{2}+\frac{1}{2}j)].$$

所以$f(z)\equiv z(z-1)(z-2)$共有$3!=6$个写成一次因子的乘积的方法。

若把方程9个根为元素作如下根矩阵：

$$\begin{pmatrix} 0 & \frac{1}{2}(1+j) & (1+j) \\ \frac{1}{2}(1-j) & 1 & \frac{1}{2}(3+j) \\ (1-j) & \frac{1}{2}(3-j) & 2 \end{pmatrix}$$

使0，1，2为主对角线元素，同行者相差第一类零除数，即相差$k(1+j)$，同列者相差第二类零除数，即相差$k'(1-j)$，则此矩阵行列式中每一项对应$f(z)$一个分解式，例如　　f_1：$0\times1\times2\to(z-0)(z-1)(z-2)$，

$$f_2:\ 0\times\frac{1}{2}(3-j)\times\frac{1}{2}(3+j)\to(z-0)(z-\frac{2}{3}+\frac{1}{2}j)\ (z-\frac{3}{2}-\frac{1}{2}j),\ \cdots$$

此结果可推广于n的情况，有重根情况另当别论。

2　j 平面

在i平面中，我们把复数$x+iy$写成

$x+iy=\rho(\cos\theta+i\sin\theta)$，$\rho=\sqrt{x^2+y^2}$，$\mathrm{tg}\theta=\frac{y}{x}$。这种以$i$平面上一

点表示复数 $x+iy$ 的方法，使复数的乘、除、乘方、开方等运算方便得多。在表示二重数 $x+jy$ 的 j 平面亦出现类似的情况。

和 i 平面一样，取 ox，oy 轴，ox 轴上的点表实数 x，oy 轴上的点表 yj，则二重数 $x+yj$ 可用 j 平面上的点表示。反之，j 平面上任一点 $P(x, y)$ 表二重数 $x+yj$，即 j 平面上的点与二重数之间有一一对应关系。计及

$$\mathrm{ch}(A+B)=\mathrm{ch}A\,\mathrm{ch}B+\mathrm{sh}A\,\mathrm{sh}B, \qquad \mathrm{sh}(A+B)=\mathrm{ch}A\,\mathrm{sh}B+\mathrm{sh}A\,\mathrm{ch}B,$$

(A，B 可为 $\alpha+\beta j$，α、β 可实可复)并写

$$x+yj=\rho(\mathrm{ch}\theta+j\,\mathrm{sh}\theta),\ \rho=\sqrt{x^2-y^2}, \quad \mathrm{ch}\theta=\frac{x}{\rho}, \quad \mathrm{sh}\theta=\frac{y}{\rho}.$$

(暂设 $x^2>y^2$，$x>0$)则这种表示式也称二重数的极表示法，具有与 $x+yi=\rho(\cos\theta+i\sin\theta)$ 同样的功用，

即如 $\quad x_1+y_1j=\rho_1(\mathrm{ch}\theta_1+j\,\mathrm{sh}\theta_1), \qquad x_2+y_2j=\rho_2(\mathrm{ch}\theta_2+j\,\mathrm{sh}\theta_2)$.

那么 $\quad (x_1+y_1j)(x_2+y_2j)=\rho_1\rho_2[\mathrm{ch}(\theta_1+\theta_2)+j\,\mathrm{sh}(\theta_1+\theta_2)]$,

$\quad (x_1+y_1j)^n=\rho_1^n(\mathrm{ch}\,n\theta_1+j\,\mathrm{sh}\,n\theta_1)$. (暂设 n 为正整数)

当 $|x|=|y|$ 即 P 点在坐标轴的分角线上时，$\rho=0$ 而 $\theta=\infty$。故可同样称坐标轴的两分角线为迷向直线。

分角线将 xoy 平面分成 A，B，C，D 四区域如图1：

当 $P=x+yj$ 在区域 A 中(即上面讨论的情况)，$\rho=\sqrt{x^2-y^2}>0$ 为实数，θ 亦为实数。且若 P 沿 $x^2-y^2=\rho^2$ 由下方走向上方如图，则 ρ 不变而 θ 由 $-\infty\to+\infty$。

这种取 ρ、θ 之法，比限定 ρ 取实数者为优，即从 ρ、θ 的虚实可知点 P 在何区域。

当 P 在区域 B 中，$\rho=\sqrt{x^2-y^2}=i\sqrt{y^2-x^2}$ 为纯虚数。

$$x+yj=\sqrt{x^2-y^2}\left(\frac{x}{\sqrt{x^2-y^2}}+\frac{y}{\sqrt{x^2-y^2}}j\right)\ (|x|\neq|y|),$$

$$\frac{x}{\sqrt{x^2-y^2}}=\frac{x}{i\sqrt{y^2-x^2}}=-i\frac{x}{\sqrt{y^2-x^2}}=-i\,\mathrm{sh}\alpha=\mathrm{ch}\left(\alpha-\frac{\pi}{2}i\right),$$

$$\frac{y}{\sqrt{x^2-y^2}}=\frac{y}{i\sqrt{y^2-x^2}}=-i\frac{y}{\sqrt{y^2-x^2}}=-i\,\mathrm{ch}\alpha=\mathrm{sh}\left(\alpha-\frac{\pi}{2}i\right),$$

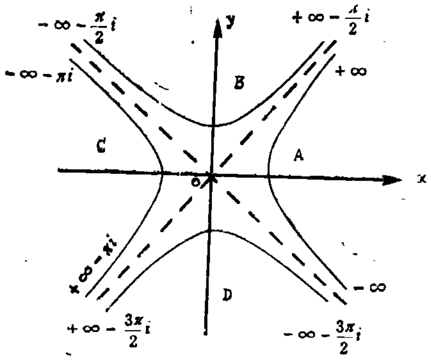

图1

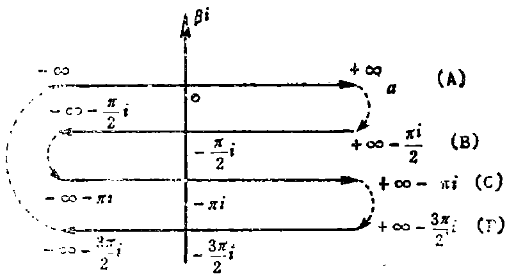

图2

故 $$x+yj=\rho[\mathrm{ch}(\alpha-\frac{\pi}{2}i)+j\,\mathrm{sh}(\alpha-\frac{\pi}{2}i)]\quad(\alpha\text{为实数})。$$

当P沿$y^2-x^2=\rho^2$曲线由右上方走向左上方时，ρ不变，而α由$+\infty\to-\infty$，即$\alpha-\frac{\pi}{2}i$由$+\infty-\frac{\pi}{2}i\to-\infty-\frac{\pi}{2}i$。

同理，在区域C中，由$-\infty-\pi i\to+\infty-\pi i$，在区域$D$中由$+\infty-\frac{3\pi}{2}i\to-\infty-\frac{3\pi}{2}i$。

总之，当$x+yj=\rho(\mathrm{ch}\theta+j\mathrm{sh}\theta)$，则随$P$所在区域，$\theta=\alpha+\beta i$有如下变化（见图2）。

就ρ及θ之虚实而论，则得在区域（A）内，ρ为实，θ为实；在区域（B）内，ρ为纯虚，$\theta=\alpha-\frac{\pi}{2}i$，$\alpha$为实；在区域（$C$）内，$\rho$为实，$\theta=\alpha-\pi i$，$\alpha$为实；在区域($D$)内，$\rho$为纯虚，$\theta=\alpha-\frac{3\pi}{2}i$，$\alpha$为实。

利用极表示法便于讨论二重数之乘、除、乘方等运算，并仍带有一定区域性。

例如(A)内两数相乘，仍为(A)内之数，因

$$\begin{aligned}(x_1+x_1j)(x_2+y_2j)&=\rho_1(\mathrm{ch}\theta_1+j\mathrm{sh}\theta_1)\cdot\rho_2(\mathrm{ch}\theta_2+j\mathrm{sh}\theta_2)\\&=\rho_1\rho_2[\mathrm{ch}(\theta_1+\theta_2)+j\mathrm{sh}(\theta_1+\theta_2)]。\end{aligned}$$

式中，ρ_1、ρ_2、θ_1、θ_2均为实数，ρ_1、ρ_2为正数，故$\rho_1\rho_2$为正数，而$\theta_1+\theta_2$为实数，从而$\rho_1\rho_2[\mathrm{ch}(\theta_1+\theta_2)+j\mathrm{sh}(\theta_1+\theta_2)]$为($A$)中之数。

至于(B)内之数与(B)内之数的乘积，究属哪一区域，可如下推之：

(B)内有二数：

$$x_1+y_1j=\rho_1(\mathrm{ch}\theta_1+j\mathrm{sh}\theta_1)=iC_1[\mathrm{ch}(\alpha_1-\frac{\pi}{2}i)+j\mathrm{sh}(\alpha_1-\frac{\pi}{2}i)],$$

$$x_2+y_2j=\rho_2(\mathrm{ch}\theta_2+j\mathrm{sh}\theta_2)=iC_2[\mathrm{ch}(\alpha_2-\frac{\pi}{2}i)+j\mathrm{sh}(\alpha_2-\frac{\pi}{2}i)]。$$

两数的乘积为$-C_1C_2[\mathrm{ch}(\alpha_1+\alpha_2-\pi i)+j\mathrm{sh}(\alpha_1+\alpha_2-\pi i)]$，但

$$\mathrm{ch}(\alpha_1+\alpha_2-\pi i)=-\mathrm{ch}(\alpha_1+\alpha_2),\quad \mathrm{sh}(\alpha_1+\alpha_2-\pi i)=-\mathrm{sh}(\alpha_1+\alpha_2)。$$

因而 $$\begin{aligned}&-C_1C_2[\mathrm{ch}(\alpha_1+\alpha_2-\pi i)+j\mathrm{sh}(\alpha_1+\alpha_2-\pi i)]\\&=C_1C_2[\mathrm{ch}(\alpha_1+\alpha_2)+j\mathrm{sh}(\alpha_1+\alpha_2)]。\end{aligned}$$

C_1，C_2为正数，而$\alpha_1+\alpha_2$是实数，所以$(x_1+y_1j)(x_2+y_2j)$是(A)中之数。

除法亦有相同现象。

现将乘除法结果列表如下（表1），由表1可推出表2（n表非零整数）。

表1

$\otimes$ ÷	A	B	C	D
A	A	B	C	D
B	B	A	D	C
C	C	D	A	B
D	D	C	B	A

表2

项目	n=1 (mod4)	n=2 (mod4)	n=3 (mod4)	n=0 (mod4)
A^n	A	A	A	A
B^n	B	A	B	A
C^n	C	A	C	A
D^n	D	A	D	A

表中符号A^n表示A中某数的非零整数n次方，当$n=1\ (\mathrm{mod}4)$时，仍为A中之数等等。

至于n为分数时情况较复杂，要考虑复二重数，即$a+bj$中的a，b均为复数。

把复二重数写成$a+bi+cj+dk$，$k=ij=ji$，a、b、c、d均为实数，则

$$a+bi+cj+dij=(a+bi)+(c+di)j.$$

以此可见复二重数代数同构于下列复矩阵

$$\begin{pmatrix} a+bi & c+di \\ c+di & a+bi \end{pmatrix}$$

同样定义$e^{a+bi+ci+dk}$的意义为 $e^{a+bi+ci+dk}=\sum_0^\infty \frac{(a+bi+cj+dk)^n}{n!}$。有了$e^{a+bi+ci+dk}$就可以定义$\mathrm{ch}(a+bi+cj+dk)$和$\mathrm{sh}(a+bi+cj+dk)$。

现研究$z^n=a+bj$（a，b是实数，即$a+bj$表示j平面上一个点）的根，n表正整数，即继二重数的乘、除、乘方之后我们再来考究二重数的开方根问题。开方时须用到极表示法，故亦分A、B、C、D四区域来讨论。

先设二重数在A内，假定它并非零除数，即不在坐标轴的分角线上。以特殊方程$z^n=1$为例，n表正整数，也即开1的n次方根，但设在复二重数范围内进行。

写$z^n=1=\mathrm{ch}(o)+j\mathrm{sh}(o)=\mathrm{ch}(2p\pi i)+j\mathrm{sh}(2p\pi i)$，$p$为整数，则得如下$n$个根

$$z_p=\mathrm{ch}\frac{2p\pi i}{n}+j\mathrm{sh}\frac{2p\pi i}{n},\quad p=0,1,2,\cdots(n-1)$$

今证当$p\neq q$时有$z_p\neq z_q$，因若$z_p=z_q$，$p\neq q$，可设$p>q$，p，$q=0,1,2,\cdots(n-1)$。

$$\mathrm{ch}\frac{2p\pi i}{n}+j\mathrm{sh}\frac{2p\pi i}{n}=\mathrm{ch}\frac{2q\pi i}{n}+j\mathrm{sh}\frac{2q\pi i}{n},$$

以右边除左边，得 $\mathrm{ch}[2(p-q)\pi i/n]+j\mathrm{sh}[2(p-q)\pi i/n]=1$，

可见 $\mathrm{sh}[2(p-q)\pi i/n]=0$ 而$\mathrm{ch}[2(p-q)\pi i/n]=1$。

从而可得$[2(p-q)\pi i]/n=2r\pi i$，r为正整数。化简后，$(p-q)=nr$。但$p,q=0,1,2,\cdots n-1$，故$p-q<n$，故前式除$r=0$外无解。而$r=0\to p=q$。

次证当$p\neq q$时，$z_p-z_q=(\mathrm{ch}\frac{2p\pi i}{n}+j\mathrm{sh}\frac{2p\pi i}{n})-(\mathrm{ch}\frac{2q\pi i}{n}+j\mathrm{sh}\frac{2q\pi i}{n}\neq k(1\pm j)$，

即 $[\mathrm{ch}(2p\pi i/n)-\mathrm{ch}(2q\pi i/n)]\neq\pm[\mathrm{sh}(2p\pi i/n)-\mathrm{sh}(2q\pi i/n)]$。

现以证 $[\mathrm{ch}(2p\pi i/n)]-[\mathrm{ch}(2q\pi i/n)]\neq[\mathrm{sh}(2p\pi i/n)]-[\mathrm{sh}(2q\pi i/n)]$

为例，计及

$$\mathrm{ch}(A+B)-\mathrm{ch}(A-B)=2\mathrm{sh}A\mathrm{sh}B,\quad \mathrm{sh}(A+B)-\mathrm{sh}(A-B)=2\mathrm{sh}B\mathrm{ch}A.$$

则

$$\mathrm{ch}(2p\pi i/n)-\mathrm{ch}(2q\pi i/n)=2\mathrm{sh}((p+q)\pi i/n)\,\mathrm{sh}((p-q)\pi i/n) \tag{1}$$

$$\mathrm{sh}(2p\pi i/n)-\mathrm{sh}(2q\pi i/n)=2\mathrm{sh}((p-q)\pi i/n)\,\mathrm{ch}((p+q)\pi i/n) \tag{2}$$

因而$\mathrm{ch}(2p\pi i/n)-\mathrm{ch}(2q\pi i/n)=\mathrm{sh}(2p\pi i/n)-\mathrm{sh}(2q\pi i/n)$化为

$$2\mathrm{sh}((p+q)\pi i/n)\,\mathrm{sh}((p-q)\pi i/n)=2\mathrm{sh}((p-q)\pi i/n)\,\mathrm{ch}((p+q)\pi i/n).$$

考虑到p，q之值的范围，$\mathrm{sh}\frac{(p-q)\pi i}{n}\neq 0$，故得

$$\mathrm{sh}((p+q)\pi i/n)=\mathrm{ch}((p+q)\pi i/n).$$

即 $\exp(-(p+q)\pi i/n)=0$。

这是不可能的。

上面证明了$z_p(p=0,1,2,\cdots,n-1)$各不相等，而且两两之差不为零除数。今进而证明$z^n=1$无等根。

首先将$z^n=1$的根依第1部份末段方法，排成n阶根矩阵，使z_p在主对角线上，而且同行元素相差$k(1+j)$，同列元素相差$k'(1-j)$。

以z_{pr}表示矩阵中与z_p同行、与z_r同列元素；z_{qs}表示与z_q同行、与z_s同列的元素，设法证明$z_{pr}\neq z_{qs}$，只要$p=q$，$r=s$不同时成立。

依假设，z_{pr}与z_p同行、与z_r同列，故有

$$z_p-z_{pr}=k(1+j),\qquad z_r-z_{pr}=k'(1-j).$$

同理 $$z_q-z_{qs}=u(1+j),\qquad z_s-z_{qs}=u'(1-j).$$

因此 $$z_{pr}-z_{qs}=(z_p-z_q)+(u-k)(1+j).$$

若$p\neq q$，已证明(z_p-z_q)不能为零除数，上式右端不能为零。因此，$z_{pr}\neq z_{qs}$。

若$p=q$，则$r\neq s$，从而$z_{pr}-z_{qs}=(z_r-z_s)+(u'-k')(1-j)$。

以上理由足见$z_{pr}\neq z_{qs}$。因而证明了$z^n=1$有n^2个不等之根。

当方程右端不是1，而是A、B、C、D之数时，仍可证明方程将有n^2个不等之根。推而广之，当根矩阵主对角线元素不互等，而且两两之差不为零除数，可以证明，根矩阵无互等元素，其所对应的$f(z)$有$n!$个分解为一次因子乘积之法。

即以上给出了$z^n=1$的上述n个根的一些性质。若把$z^n=1$写作

$$z^n=1=1\times1=[\cos 0+i\sin 0][\mathrm{ch}\,0+j\,\mathrm{sh}\,0]$$
$$=[\cos 2p\pi+i\sin 2p\pi]\cdot[\mathrm{ch}\,2r\pi i+j\,\mathrm{sh}\,2r\pi i].$$

则有下根 $$z_{pr}=[\cos(2p\pi/n)+i\sin(2p\pi/n)][\mathrm{ch}(2r\pi i/n)+j\,\mathrm{sh}(2r\pi i/n)],$$
$$p,\ r=0,1,2,\cdots n-1$$

（前述的z_p，z_q实即z_{op}，z_{oq}）。由于p，q各取n个值，故共有n^2个z_{pr}。是不是这n^2个z_{pr}就正好是$z^n=1$的n^2个根呢？并不常常如此。

可以证明，当n为奇数时，$z_{pq}(p,q=0,1,2,\cdots n-1)$构成$n^2$个互不相等的数，亦即给出方程$z^n=1$的$n^2$个根。当$n$为偶数$n=2m$时，有$2m^2$对$z_{pr}$，$z_{qs}$相等，即$z_{pq}$ $(p,q=0,1,2,\cdots,n-1)$只给出n^2个根中的n^2-2m^2个根，亦即只给出方程的$n^2=4m^2$个根中一半的根。

如果方程不是$z^n=1$而是$z^n=a+bj$，$a+bj$表A、B、C、D中之数，结果也相同。

至于零除数的开方根问题，可取$(1+j)$为例，作如下讨论。

由于$(1+j)^2=2(1+j)$，$(1+j)^3=2(1+j)^2=2^2(1+j)$，…，足见$(1+j)^n=2^{n-1}(1+j)$，可推得$(1+j)^{1/n}=\left(\frac{1}{2^{n-1}}\right)^{1/n}(1+j)$，在复二重数范围内，$\left(\frac{1}{2^{n-1}}\right)^{1/n}$有$n^2$个根，因而从这个式子也可得到$(1+j)^{1/n}$的$n^2$个根，例如取$n=2$，得$(1+j)^{1/2}$的四根为$\frac{1}{\sqrt{2}}(1+j)$，$\frac{-1}{\sqrt{2}}(1+j)$，$\frac{j}{\sqrt{2}}(1+j)=\frac{1}{\sqrt{2}}(1+j)$，

$-\frac{1}{\sqrt{2}}(1+j)$，可见$\frac{1}{\sqrt{2}}(1+j)$，$-\frac{1}{\sqrt{2}}(1+j)$为重根。

直接解$z^2-(1+j)=0$亦得相同结果，令$z=x+yj$，则

$$z^2-(1+j)=0\Rightarrow\begin{cases}x^2+y^2-1=0\\2xy-1=0\end{cases}$$

解得 $x=\pm\frac{1}{\sqrt{2}}$，$y=\pm\frac{1}{\sqrt{2}}$ 即$x+yj$等于$\frac{1}{\sqrt{2}}(1+j)$或$-\frac{1}{\sqrt{2}}(1+j)$，且均为重根。从几何上看，$x^2+y^2=1$为圆，$2xy=1$为双曲线，此二曲线正好有$(\frac{1}{\sqrt{2}},\frac{1}{\sqrt{2}})$，$(-\frac{1}{\sqrt{2}},-\frac{1}{\sqrt{2}})$二切点。

3 根矩阵若干性质

设已将n次方程n^2个根排成n阶根矩阵，以a_{ik}表示矩阵中i行k列元素。我们有

性质1 根矩阵主对角线上的n个元素完全决定根矩阵中n^2个元素。

通过矩阵的初等交换，即行与行、列与列之间的对调，可使矩阵行列式中，任一项的元素成为主对角线上的元素，故此性质1具有广泛的意义；即若已知根矩阵行列式中任一项，都可决定根矩阵中所有全部元素。

性质2 若主对角线上无相等元素，而且两两之差不为零除数，则根矩阵中无相等元素，而且两两之差不为零除数。

性质3 若主对角线上有二元素相等，设为$a_{11}=a_{22}$，则根矩阵中第一第二列上元素，同行者相等；而第一行、第二行上元素，同列者相等，且$\begin{pmatrix}a_{11}&a_{12}\\a_{21}&a_{22}\end{pmatrix}$化为$\begin{pmatrix}a_{11}&a_{11}\\a_{11}&a_{11}\end{pmatrix}$

性质4 若主对角线上有二元素之差为第一类零除数，即a_{11}，$a_{22}=a_{11}+\mu(1+j)$，则根矩阵中第一第二行元素同列者相等，而且$\begin{pmatrix}a_{11}&a_{12}\\a_{21}&a_{22}\end{pmatrix}$化为$\begin{pmatrix}a_{11}&a_{11}+\mu(1+j)\\a_{11}&a_{11}+\mu(1+j)\end{pmatrix}$

若二元素之差为第二类零除数，即a_{11}，$a_{22}=a_{11}+\mu'(1-j)$，则根矩阵中第一第二列元素，同行者相等，而$\begin{pmatrix}a_{11}&a_{12}\\a_{21}&a_{22}\end{pmatrix}$化为$\begin{pmatrix}a_{11}&a_{11}\\a_{11}+\mu'(1-j)&a_{11}+\mu'(1-j)\end{pmatrix}$

上述性质可推广于既不同行又不同列的任两个元素上。

4 复二重数初论

复二重数可写为：$a+bi+cj+dk$；其中a，b，c，d为实数，$k=ij$。
一般地可写：

$$\begin{aligned}a+bi+cj+dk&=\rho e^{i\theta+j\varphi+k\psi}\\&=\rho(\cos\theta+i\sin\theta)(\mathrm{ch}\varphi+j\mathrm{sh}\varphi)(\cos\psi+k\sin\psi)\end{aligned}$$

$$=\rho[P(\theta,\varphi,\phi)+iQ(\theta,\varphi,\phi)+jR(\theta,\varphi,\phi)+kS(\theta,\varphi,\phi)].$$

其中，$a=\rho P$，$b=\rho Q$，$c=\rho R$，$d=\rho S$，

$$P=\cos\theta\operatorname{ch}\varphi\cos\phi-\sin\theta\operatorname{sh}\varphi\sin\phi,\quad Q=\sin\theta\operatorname{ch}\varphi\cos\phi+\cos\theta\operatorname{sh}\varphi\sin\phi,$$

$$R=\cos\theta\operatorname{sh}\varphi\cos\phi-\sin\theta\operatorname{ch}\varphi\sin\phi,\quad S=\cos\theta\operatorname{ch}\varphi\sin\phi+\sin\theta\operatorname{sh}\varphi\cos\phi.$$

可以验算P，Q，R，S满足

$$[(P+R)^2+(Q+S)^2][(P-R)^2+(Q-S)^2]=1.$$

从而导出　$\rho^4=[(a+c)^2+(b+d)^2][(a-c)^2+(b-d)^2]$。

又可得

$$\left.\begin{aligned}\cos2\theta&=(a^2-b^2-c^2+d^2)/\rho^2\\ \operatorname{ch}2\varphi&=(a^2+b^2+c^2+d^2)/\rho^2\\ \cos2\phi&=(a^2+b^2-c^2-d^2)/\rho^2\end{aligned}\right\}\text{余弦公式}$$

从以上各式足以确定θ，φ，ϕ。

同样，通过直接计算，可以得到

$$\left.\begin{aligned}\sin2\theta&=2(PQ-RS)=2(ab-cd)/\rho^2\\ \operatorname{sh}2\varphi&=2(PR+QS)=2(ac-bd)/\rho^2\\ \sin2\phi&=2(PS-QR)=2(ad-bc)/\rho^2\end{aligned}\right\}\text{正弦公式}$$

和其它许多类似三角函数之和角、差角、倍角等公式。

设复二重数α能用“极表示法”　$\alpha=\rho\exp(\theta i+\varphi j+\phi k)$

计及周期性，可写：　$\alpha=\rho\exp[(\theta+2t\pi)i+(\varphi+2t'\pi i)j+(\phi+2t''\pi)k]$。

式中t，t'，t''为整数。由于$ij=k$，上式又可写成：

$$\alpha=\rho\exp[(\theta+2p\pi)i+\varphi j+(\phi+2q\pi)k].$$

式中，p，q为整数，在α的各种θ，φ，ϕ中，恒可设φ不复，而只有θ，ϕ增加2π的倍数。

取$a=1$，并用上法求$z^n=1$的解，因为：

$$1=\exp(oi+oj+ok)=\exp(2p\pi i+2q\pi k),$$

$$z^n=\exp(2p\pi i+2q\pi k),$$

$$z_{pq}=\exp[(2p\pi/n)i+(2q\pi/n)k].$$

p，$q=0,1,2,\cdots,(n-1)$，令$z_p=z_{p_0}=\exp(2p\pi i/n)$，先证当$p_1\neq p_2$，$p_1>p_2$时$z_{p_1}\neq z_{p_2}$。因若$z_{p_1}=z_{p_2}$，则$\exp(2p_1\pi i/n)=\exp(2p_2\pi i/n)$，即

$$\exp[2(p_1-p_2)\pi i/n]=1,$$

$$\cos(2(p_1-p_2)\pi/n)=1,\quad \sin[2(p_1-p_2)\pi/n]=0.$$

也即

$$2(p_1-p_2)\pi/n=2\mu\pi,\quad 2(p_1-p_2)\pi/n=\mu'\pi.$$

但如第2部分中所言，此等式子除$p_1=p_2$外无解。

次证　$z_{p_1}-z_{p_2}\neq k(1\pm j)$，

因若

$$\exp(2p_1\pi i/n)-\exp(2p_2\pi i/n)=k(1\pm j).$$

上式左端无j，这表示$k=0$，因而上式归化为$z_{p_1}=z_{p_2}$。此已证其为不可能。

z_p可取为主对角线元素，与$z^n=1$相应的根矩阵无相等元素，从而z^n-1共有$n!$个分解为一次因子乘积方法。

若a为一般复二重数，可写：$a=\rho\exp[(\theta+2p\pi)i+\varphi j+(\phi+2q\pi)k]$，则$z^n=\alpha$之解可作如下考虑

将$z^n=a$的解写成$z=(1)^{1/n}(a)^{1/n}=z_p(a)^{1/n}$。式中$(a)^{1/n}$为$a$任一$n$次方根。易知其不能为零除数。因$\alpha$设非零除数，$z_p$意义同上，即$z^n=1$的根矩阵中主对角线元素。

由于z_p互不相等，两两之差不为零除数，$z_p(\alpha)^{1/n}$也有此性质，故知与$z^n=\alpha$相应之根矩阵由互不相等的元素组成，$f(z)=z^n-\alpha$共有$n!$个不同的分解为一次因子乘积之法。

写：
$$z^n=\alpha=\rho\exp[(\theta+2p\pi)i+\varphi j+(\phi+2q\pi)k],$$
$$z_{pq}=\rho^{1/n}\exp[((\theta+2p\pi)i/n)+(\varphi/n)j+((\phi+2q\pi)/n)k].$$

p，$q=0,1,2,\cdots,(n-1)$。共可得n^2个z_{pq}。但不一定都不相同，即z_{pq}不一定给出$z^n=\alpha$全部n^2个根，也和实二重数的情况一样。

可以证明，当n为奇数时，z_{pq}($p,q=0,1,2,\cdots,n-1$)是n^2个互不相等的数，也即给出方程$z^n=\alpha$的n^2个根。当n为偶数$n=2m$时，有$2m^2$对相等，即z_{pq}只给出n^2个根中的n^2-2m^2个根，也即只给出方程的$n^2=4m^2$个根中一半的根。

On Double Number

*Ye Shuwu**

Abstract

A double number α is defined in terms of two real numbers a and b and is designated by $\alpha=a+bj$, where $j^2=1$. In this paper, some properties of double numbers are given and the roots of the equation $z^n=a+bj$ are discussed.

Keywords double number, zero divisor

* Institute of Mathematical Sciences, Academia Sinica