

# 流动稳定性Orr-Sommerfeld问题的一种改进型完全正交化方法

段志田 张涤明

(应用力学与工程系)

## 摘要

本文对A. Davey提出的数值求解Orr-Sommerfeld问题的完全正交方法做了改进,避免了原方法计算总体传递矩阵带来的缺点,克服了原方法在计算本征函数上的困难,并建议在单元上采用Hermit插值近似。

**关键词** Orr-Sommerfeld问题, 本征值, 完全正交化方法, 传递矩阵

近年来, Orr-Sommerfeld(以下简称为O-S)问题的数值解法得到了广泛研究,发展了多种方法。文[2]认为Numerov差分法是一种较好的方法,但其结果的精度依赖参数的经验选取。文[3]用差分坐标变换法得到了好的结果(雷诺数 $\geq 500$ ),但雷诺数不能很大。Davey方法<sup>[1]</sup>可应用到雷诺数很大的情况,而且能普遍适用于高阶线性常微分方程的本征值问题,是一种简便而精度好的方法。但它有计算总体传递矩阵带来的缺点,且不适于计算本征函数。本文的改进方法有效地解决了这两个问题,而无损Davey方法的优点。

## 1 Davey完全正交化方法

平面 Poiseuille流的O-S问题为

$$L\phi = \{ (D^2 - \alpha^2)^2 - i\alpha Re \} (\bar{u} - C) (D^2 - \alpha^2) - D^2 \bar{u} \} \phi = 0 \quad (1)$$

$$\phi(-1) = D\phi(-1) = 0 \quad (1a)$$

$$\phi(+1) = D\phi(+1) = 0 \quad (1b)$$

这里,  $D = d/dy$ ,  $\bar{u} = 1 - y^2$ 为平面Poiseuille流的层流解,  $\phi(y)$ 为扰动流函数的振幅,  $\alpha$ 为波数,  $Re$ 为雷诺数,  $C$ 为复本征值, 令

$$Z = (z_1, z_2, z_3, z_4)^T = (\phi, D\phi, D^2\phi, D^3\phi)^T$$

$$\beta = 2\alpha^2 + i\alpha Re (\bar{u} - C)$$

$$\gamma = - \{ \alpha^4 + i\alpha Re [ \alpha^2(\bar{u} + C) + D^2\bar{u} ] \}$$

本文1989年6月30日收到

\*中山大学高等学术研究中心基金会资助课题

及矩阵

$$B(y) = \begin{pmatrix} 0 & 1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 1 \\ \gamma & 0 & \beta & 0 \end{pmatrix}, F_a = \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 \end{pmatrix}, F_b = \begin{pmatrix} 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 \\ 1 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 & 0 \end{pmatrix}$$

用 $Z_a, Z_b$ 依次表示两边界端的边界解向量, 则O-S问题用矩阵表达为

$$dZ/dy = B(y)Z \tag{2}$$

$$F_a Z_a + F_b Z_b = 0 \tag{2a}$$

下面简述Davey方法:

将区间 $[a, b]$ 分成 $p$ 个节, 在每个节上划分 $q$ 个单元, 即总单元数为 $N = pq$ (图1), 注意对O-S问题, 这里 $a = -1, b = 1$ .

对方程(2), 从第 $i$ 个结点到第 $i+1$ 个结点 积分得 $Z_{i+1} = S_{i+1}Z_i$ , 从而有

$$Z_N = S_N S_{N-1} \cdots S_2 S_1 Z_0,$$

即总传递矩阵为

$$T = S_N S_{N-1} \cdots S_2 S_1 \tag{3}$$

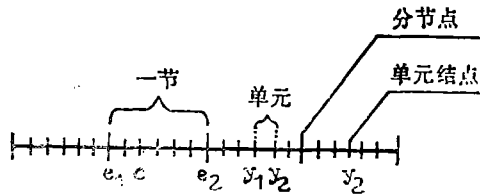


图1 节和单元划分示意图

Fig.1 Sketch of diving elements and sections

或者先在每个节上做 $q$ 步积分得传递矩阵 $W_i, (i = 1, 2, \dots, P)$ ; 于是总传递矩阵为

$$T = W_P \cdot W_{P-1} \cdots W_2 \cdot W_1 \tag{4}$$

(4)是对(3)算法的改进, 是按节多次正交化的结果, 所做的改进是以分节为基础的.

## 2 改进型完全正交化方法

在单元上取插值近似, 对(2)式在单元上积分, 有

$$(E - G_2) Z(y_2) = (E + G_1) Z(y_1) \tag{5}$$

其中,  $E$ 为 $4 \times 4$ 的单位矩阵,  $G_1, G_2$ 为 $4 \times 4$ 矩阵, 对单元上的线性插值近似为

$$G_i = \int_{y_1}^{y_2} B(y) L_i(y) dy, \quad i = 1, 2$$

其中,  $L_1(y), L_2(y)$ 是Lagrange线性插值的两个形函数. 对单元上的Hermit插值近似

$$G_i = \int_{y_1}^{y_2} B(y) [EP_i(y) + B(y)q_i(y)] dy, \quad i = 1, 2$$

其中,  $P_1(y)$ ,  $P_2(y)$ ,  $q_1(y)$ ,  $q_2(y)$ 为Hermit插值形函数:

$$P_1(y) = \frac{3}{h_3} (y_2 - y)^2 - \frac{2}{h_3} (y_2 - y)^3,$$

$$P_2(y) = \frac{3}{h^2} (y - y_1)^2 - \frac{2}{h^3} (y - y_1)^3;$$

$$q_1(y) = h \left[ \frac{1}{h^2} (y_2 - y)^2 - \frac{1}{h^3} (y_2 - y)^3 \right],$$

$$q_3(y) = -h \left[ \frac{1}{h_2} (y - y_1)^2 - \frac{1}{h^3} (y - y_1)^3 \right].$$

其中,  $h_2 = h_2 - y_1$ 为单元长. 本文的Hermit插值处理是重要的.

式(5)决定了从 $Z(y_1)$ 到 $Z(y_2)$ 或从 $Z(y_2)$ 到 $Z(y_1)$ 的传递矩阵. 现考察其中一节, 设 $C$ 位于相邻节点 $e_1$ 和 $e_2$ 之间(图1), 那么如Davey法有传递矩阵 $L$ ,  $R$ , 使得:

$Z_c = LZ_{e_1}$ ,  $Z_c = RZ_{e_2}$ , 于是有:

$$LZ_{e_1} - RZ_{e_2} = 0 \quad (6)$$

其中,  $L$ 和 $R$ 的元素量级要比Dauey法中 $e_1$ 与 $e_2$ 之间直接传递的矩阵 $W$ 的元素量级要小, 它加强了分节的效率.

设在 $e_1$ 点, 由前端传过来的边界条件为

$$F_{A1}Z_{A1} + F_{A2}Z_{A2} = 0 \quad (7)$$

记分块矩阵及向量为

$$L = \begin{pmatrix} L_{11} & L_{12} \\ L_{21} & L_{22} \end{pmatrix}, \quad R = \begin{pmatrix} R_{11} & R_{12} \\ R_{21} & R_{22} \end{pmatrix}, \quad Z_{e_1} = \begin{pmatrix} Z_{A1} \\ Z_{A2} \end{pmatrix}, \quad Z_{e_2} = \begin{pmatrix} Z_{B1} \\ Z_{B2} \end{pmatrix}$$

由(6)得:

$$L_{11}Z_{A1} + L_{12}Z_{A2} - R_{11}Z_{B1} - R_{12}Z_{B2} = 0 \quad (8)$$

$$L_{21}Z_{A1} + L_{22}Z_{A2} - R_{21}Z_{B1} - R_{22}Z_{B2} = 0 \quad (9)$$

由(7)解出 $Z_{A1}$ , 代入(8)、(9)两式, 然后由(8)解出 $Z_{A2}$ , 并代入(9)整理得:

$$F_{B1}Z_{B1} + F_{B2}Z_{B2} = 0 \quad (10)$$

其中

$$F_{B1} = [L_{22} - L_{21}F_{A1}^{-1}F_{A2}] [L_{12} - L_{11}F_{A1}^{-1}F_{A2}]^{-1}R_{11} - R_{21}$$

$$F_{B2} = [L_{22} - L_{21}F_{A1}^{-1}F_{A2}] [L_{12} - L_{11}F_{A1}^{-1}F_{A2}]^{-1}R_{12} - R_{22}$$

这样, 式(7)~(10)实现了边界条件从 $e_1$ 到 $e_2$ 的传递, 显然可类似地实现从 $e_2$ 到 $e_1$ 的传递.

用上面的方法, 可将 $a$ 端的边界条件依次传递到各个分节点直到 $b$ 端, 设仍用式(10)的记号, 而已知的 $b$ 端的边界条件为

$$F_{b1}Z_{B1} + F_{b2}Z_{B2} = 0 \quad (11)$$

记

$$G = \begin{pmatrix} F_{b1} & F_{b2} \\ F_{B1} & F_{B2} \end{pmatrix}, \quad Z_B = \begin{pmatrix} Z_{B1} \\ Z_{B2} \end{pmatrix}$$

则式(10)、(11)可统一写为

$$G \cdot Z_B = 0 \quad (12)$$

因此本征值 $C$ 在 $b$ 端应满足条件

$$\det(G) = 0 \quad (13)$$

本征值的计算需用迭代法。 $b$ 点的本征向量由满足(13)式的矩阵 $G$ 求出, 设 $G$ 的广义逆矩阵为 $G^+$ , 那么 $E - G^+$ 的一列(或行)为 $b$ 点的本征向量。

需要说明的是, 通过顺向传递和逆向传递可在任一分布点建立式(12)、(13), 通常情况下本征值只需在一个分节点或边界点迭代求解即可, 而在计算本征函数时, 必须按(12)、(13)在各个分节点求出节点本征向量, 然后在节内由式 $Z_{i+1} = S_{i+1}Z_i$ , 求出各单元结点上的本征向量。

改进后的方法, 与Davey法比较发现, 后者总要计算总体传递矩阵, 这样用一个矩阵联系两端的边界解向量往往是困难的, 以致带来很大的误差积累, 前者不计算总体传递矩阵, 用分块矩阵技术按节传递边界条件, 在每节内从分节点到节内中的点才按Davey方法计算传递矩阵, 这样不会引起大的误差积累, 克服了Davey计算本征值时必须进行经验性修正的缺点, 而且能成功地计算本征函数。

### 3 计算结果及分析

为了研究单元上不同插值近似对计算结果的影响, 我们分别用线性插值和Hermit插值做了计算(见表1)。结果表明, 对单元上的线性插值近似, 随着单元数的增加本征值的收敛相当缓慢, 即使用了相当多的单元(600个), 本征值的精度仍很差。但用Hermit插值时, 仅用70个单元就算到很好的结果。可见本文的Hermit插值近似, 对提高结果精度, 大幅度减少单元数, 从而成倍地减少计算量, 是极为有效的。

表1  $Re = 3000, \alpha = 1$ , 不同插值近似的结果比较  
Tab.1 Comparison between the results of different interpolation,  $Re = 3000, \alpha = 1$

线性插值		Hermit插值	
单元数	本征值 $C$	单元数	本征值 $C$
300	0.29248 - 0.00966i	50	0.29222 - 0.01015i
600	0.29242 - 0.00964i	70	0.29227 - 0.01018i

我们还对几个典型的雷诺数情形做了计算, 与Davey的结果比较(表2)可见, 本法在本征值的计算上, 算法可靠, 尤其对于大雷诺数更具优越性, 在达到相同精度的情况下, 可成数量级地减少计算存储和计算工作量。

对本征函数的计算因O-S问题找不到可供比较的结果, 这里只给出可和解析解相比较的, 单位长的两端固支的梁的振动模态的计算结果, 由图2给出的三阶模态可见, 数值解与精确解符合得很好。

表2  $\alpha = 1$ , 本文方法与Davey法的结果比较Tab.2 Comparison between the results of this method and those of Davey,  $\alpha = 1$ 

雷诺数	本征值C		单元数	
	Davey方法	本文方法	Davey	本文
3000	0.29229 - 0.01018i	0.29227 - 0.01018i	300	70
10000	0.23753 + 0.00374i	0.23753 + 0.00374i	600	80
40000	0.18368 + 0.00242i	0.18366 + 0.00244i	1200	90
100000	0.14592 - 0.01504i	0.14585 - 0.01510i	2100	110

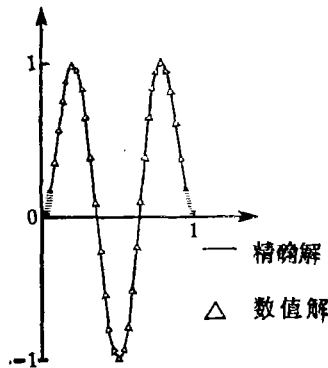


图2 模态

Fig.2 Modality

## 参 考 文 献

- [1] Davey A, Q. *JL Mech. Appl. Math.* XXVI, Pt. 4(1973), 401
- [2] Zhou H, *Proc. R. Soc. Lond.*, A381, 1982, 407~418
- [3] Zhang Diming et al., *The Advance of Applied Math. and Mech. in China*, Vol. 3 International Academic Publishers & Pergamon-CNPIEC Joint Venture

## Modified Complete Orthonormalization Method for Solving Orr-Sommerfeld Problems

Duan Zhitian\*

Zhang Diming

A Davey's complete orthonormalization method for solving Orr-Sommerfeld problems is modified to overcome the disadvantages in calculating eigenvalues and eigenfunctions.

**Keywords** Orr-Sommerfeld problems, eigenvalue, method of complete orthonormalization, transfer matrix

\* Department of Applied Mechanics and Engineering