

带参数可外平面图的一个算法

朱秉寰

(计算机科学系)

摘要

证明了顶点的权为参数 t 的线性函数, 尺寸为 n 的可外平面图的最小顶点复盖的耗费函数的折点个数围界于 $O(n^{10g_2^{12}})$, 且提出了一个时间复杂性为 $O(n^{10g_2^{12}})$ 的求解算法.

关键词 可外平面图, 顶点复盖, NP完全

1 引言

只讨论简单无向无自返边的图 G . 记 $V(G)$ 为 G 的顶点集, $E(G)$ 为 G 的边集, $e = |E(G)|$, 称 $n = |V(G)|$ 为 G 的尺寸. 设 $S \subset V(G)$, 若任一 $(u, v) \in E(G)$ 都有 $u \in S$ 或 $v \in S$, 则称 S 是 G 的一个**顶点复盖(VC)集**. 给定权函数 $c: V(G) \rightarrow R^+$, 称使 $W(G) = \sum_{v \in S} c(v)$ 达到最小的VC集 S 为 G 的**最小顶点复盖集(MVC)**, $W(G)$ 为 G 的MVC耗费. MVC问题是NP完全的^[1].

设权函数 c 是参数(时间) t 的线性函数, 即对每一 $v \in V(G)$ 有 $c(v, t) = a_v t + b_v$, 其中 $a_v, b_v \geq 0$ 是常数, $0 \leq t < \infty$. 问题是对每个 $0 \leq t < \infty$ 求 G 的MVC集 $S(t)$ 和耗费 $W(G, t)$ (见图1及表1).

表1 图1(a)的MVC集合和MVC耗费

Tab.1 The MVC set and MVC cost of the graph in Fig.1(a)

t 所属区间	MVC 集合	MVC 耗费
$[0, 2/3]$	$\{v_1, v_3, v_5, v_6, v_7\}$	$10 + 28t$
$[2/3, 1]$	$\{v_1, v_2, v_4, v_5, v_7\}$	$14 + 22t$
$[1, 2]$	$\{v_2, v_4, v_5, v_7, v_8\}$	$18 + 18t$
$[2, 3]$	$\{v_2, v_3, v_4, v_6, v_8\}$	$20 + 17t$
$[3, \infty)$	$\{v_2, v_3, v_4, v_6, v_8\}$	$20 + 17t$

本文1989年12月1日收到

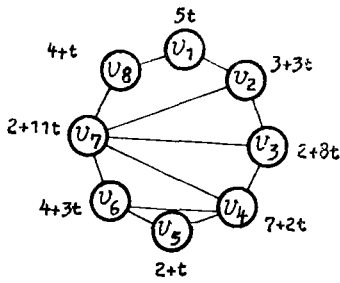


图 1(a) 顶点权是t的函数的一个图

Fig.1(a) A graph which vertex weights are function of t

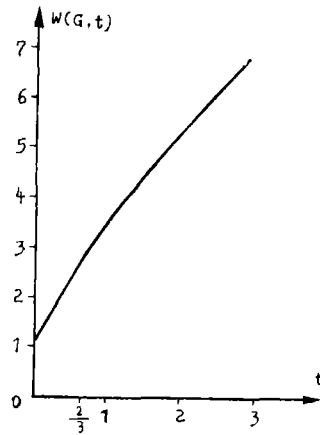


图 1(b) 图 1(a)的W(G,t), 2/3,1,2是折点

Fig. 1(b) W(G,t) of the graph in Fig.1(a)

文献[2]证明了W是个逐段线性凸函数(plf), 即有 $0 = t_0 < t_1 < \dots < t_m < t_{m+1} < \infty$, 使得对每一 $0 \leq i \leq m, t \in [t_i, t_{i+1}]$ 都有 $W(G,t) = c_i t + d_i, c_i \neq c_{i+1}, c_i t_{i+1} + d_i = c_{i+1} t_{i+1} + d_{i+1}$, 对 $t \in [t_{m+1}, \infty)$ 有 $W(G,t) = c_m t + d_m$, 其中m是一个正整数, c_i, d_i 是常数. 对 $1 \leq i \leq m$, 称 t_i 是W的折点. 这时, 估算W的折点个数并不容易.

不过, 如果对图的结构作适当的限制, 往往仍可得到令人满意的结果. 本文采用“中心化加分治术”来解决可外平面图(opg)的MVC问题.

能把G嵌入到一个实平面中去, 且有一个包含每一 $u \in V(G)$ 的对应点的区域时, 就称G为opg. 若G为opg, 则其任一子图也是opg, 且 $e \leq 2n + 3$. 任一二连通的opg有唯一的哈密顿圈(HC).

G中尺寸最大的那个连通分枝称为G的最大连通分枝. 设 $S \subseteq V(G)$, 记G中S的导出子图为 $G(S)$, 记 $\bar{S} = V(G) \setminus S$. 若 $|S| \leq k$, 且 $G(\bar{S})$ 的最大连通分枝的尺寸 $\leq n/2$, 则称S为G的一个k阶中心点集. 如 $\{u_3, u_7\}$ 是图1(a)的一个二阶中心点集.

2 主要结果

记顶点v的邻集为 N_v , 设 $S \subseteq V(G)$, 记 $N(S) = \bigcup_{v \in S} N_v$.

定理 1 opg G有一个三阶中心点集S. 且若 $|S| \geq 2$ 则有 $u, v \in S$ 使得 $(u, v) \in E(G)$; 若 $S = \{u_0, u_1, u_2\}$ 则可把 \bar{S} 分划为 V_0, V_1, V_2 , 使得 $G(\bar{S})$ 中的每个连通分枝C都有 $V_i, V(C) \subseteq V_i$ 且任何 $u \in V_i$ 都有 $(u, u_i) \notin E(G), 0 \leq i \leq 2$.

证明 只要证明G连通且 $n > 3$ 时定理成立即可. 对每一 $v \in V(G)$, 记 C_v 为 $G(\bar{\{v\}})$ 中的最大连通分枝的顶点集合, $C'_v = \{v\} \cup C_v$. 对每一 $v \in V(G)$ 定义v的“中心度” $g(v)$ 为

$$g(v) = \begin{cases} n & \text{当 } |C_v| \leq n/2, \\ n - |C_v| & \text{否则.} \end{cases}$$

显然 $g(v) > 1$ 当且仅当 v 是 G 的一个割点，且若有 v_0 使 $g(v_0) = n$ 则 $S = \{v_0\}$ 就是一个三阶中心点集，此时定理成立。

现设任何 $v \in V(G)$ 都有 $g(v) < n/2$ 。记 u 是使得 $|C_v|$ 达到最小的顶点。于是 $|C_u| > n/2$ 。记 B 为 $G(C'_u)$ 中含有顶点 u 的二连通分枝（见图 2），则对每一 $v \in V(G)$ 都有 $C_v \cap V(B) \neq \emptyset$ 。事实上，若 $v \in V(B)$ 则显然有 $C_v \cap V(B) \neq \emptyset$ ，若 $v \in C_u \setminus V(B)$ 则在图 $G(\overline{\{v\}})$ 中必含有一个包含 $X = V(B) \cup \overline{C}_u$ 全部顶点的连通分枝，如果这不是个最大连通分枝，则有 $C_v \subset C_u$ ，但这和 u 的有关假设相矛盾，故 $C_v \supseteq X$ ，若 $v \in \overline{C}'_u$ 则 $G(\overline{\{v\}})$ 中必有一连通分枝包含 C'_u 的全部顶点，因 $|C_u| > n/2$ ，故 $C_v \supseteq C'_u \supseteq V(B)$ 。

现设 $m = |V(B)|$ 。若 $m = 2$ 则 $S = V(B)$ 就是定理所求的中心点集。

若 $m \geq 3$ 则 B 必有 HC ，设为 $(v_0, v_1, \dots, v_{m-1}, v_0)$ 。以后记 $\sum_{i=1}^j g(v_i)$ 为 Σ_i^j 。对任何 $0 \leq i < j < m-1$ 及 $(v_i, v_j) \in E(B)$ 据外单面性可知，任何 $k_1 < i$ 或 $k_1 > j$ ，及 $i < k_2 < j$ 都有 $(v_{k_1}, v_{k_2}) \notin E(B)$ （见图 3），因此边 (v_i, v_j) 的“碎度”值：

$$h(i, j) = \begin{cases} n - \Sigma_i^j & \text{当 } j = i+1, \\ \max(\Sigma_{i+1}^{j-1}, n - \Sigma_i^j) & \text{否则} \end{cases}$$

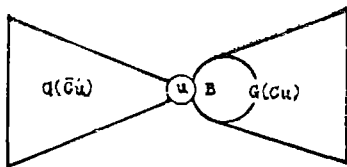


图 2 u, C_u 和 B
Fig. 2 u, C_u and B

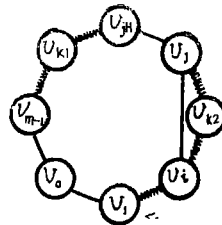


图 3 二连通分枝 B
Fig.3 The biconnected Component B

是 $G(\overline{\{v_i, v_j\}})$ 中含有 B 的顶点的最大连通分枝的尺寸。不失一般性，设

$$h(0, k) = \min \{h(i, j) : (v_i, v_j) \in E(B)\}$$

若 $h(0, k) < n/2$ 则 $S = \{v_0, v_k\}$ 就是满足定理要求的中心点集。否则不妨设 $h(0, k) = \Sigma_1^{k-1}$ 。

记 $0'$ 为从 v_0 出发，沿路径 $(v_0, v_1, \dots, v_{k-1})$ 走，经一条和 v_0 相关的边能够到达的最远的顶点的号码；对 $0 < i < k$ ，记 i' 为从 v_i 出发，沿路径 $(v_i, v_{i+1}, \dots, v_k)$ 走，经一条和 v_i 相关的边所能到达的最远的顶点的编号。于是对 $0 \leq i < k$ 都有 $\Sigma_{i+1}^{i'-1} < n/2$ （不然的话，就

会因为 $h(i, i') = \sum_{i+1}^{i'-1} < h(0, k)$ 而和关于 $h(0, k)$ 的假设矛盾)。

令 i 沿 $0, 0', 0'', \dots$ 作考察, 记使 $\sum_{i+1}^{i'-1} > n/2$ 成立的第一个 i 为 r , 于是 $\sum_{i+1}^{i'-1} < n/2$, $\sum_{r+1}^{r'-1} < n/2, \sum_{r'+1}^{m-1} < n/2$. 分别记 $v_0, v_r, v_{r'}$ 为 u_0, u_1, u_2 , 则 $S = \{u_0, u_1, u_2\}$ 是个中心点集, $(u_1, u_2) \in E(G)$. 记 $X_0 = \{v_{r+1}, v_{r+2}, \dots, v_{r'-1}\}, X_1 = \{v_{r'+1}, v_{r'+2}, \dots, v_{m-1}\}, X_2 = \{v_1, v_2, \dots, v_{r-1}\}$, $G(\bar{S})$ 里含 X_i 的顶点的连通分枝的顶点集记为 V_i' . 从 G 中删去 S 及 $\bigcup V_i'$ 的各顶点后所得的子图中, 含有 N_{u_i} 顶点的各连通分枝的顶点集之并集设为 $V''_{(i+1) \bmod 3}$ (见图4), 令 $V_i = V_i' \cup V_i''$, 则 V_0, V_1, V_2 是满足定理要求的 \bar{S} 的一个三分划. \square

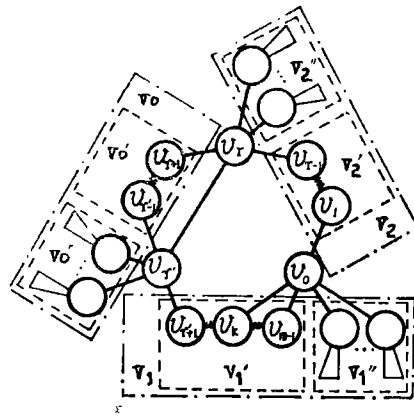


图4 \bar{S} 的三分划
Fig.4. The 3-partitioning of \bar{S}

易于改写Hopcroft算法^[3], 对 G 作先深遍历, 后序地输出 G 的各二连通分枝和割点, 计算各个 $g(v)$, 算出 B 和 B 的 HC 及各个 $h(i, j)$, 最后确定中心点集 S . 我们得下述推论. 证明从略.

推论 1 可在 $O(n^2)$ 时间内求出 $opg G$ 的三阶中心点集. \square

设 $S \subseteq V(G), A \subseteq S$, 且 $S \setminus A$ 中的顶点之间无边, 考虑尽量含有 A 而不含 $S \setminus A$ 的顶点的 G 的 VC 集的最小耗费 $CW(G, A, S)$:

$$CW(G, A, S) = \sum_{u \in A \cup N(S \setminus A)} C(u) + W(G(S \cup \bar{N}(S \setminus A))) \tag{1}$$

(1)式右边的第一项表示必属于这种 VC 集的顶点的权和, 第二项表示删去这些顶点及必不属于这种 VC 集的顶点的邻集顶点之后, 所得的导出子图的 MVC 耗费.

于是有:

$$W(G) = \min\{CW(G, A, S) : A \subseteq S\} \tag{2}$$

若每次都选 S 为图的中心点集, 则可利用(2), 以分治术求解 MVC 问题.

把这种想法用到 $opg G$ 上. 据定理1, $|S| \leq 3$. 最复杂的情况为 $S = \{u_0, u_1, u_2\}$, $(u_1,$

$u_2) \in E(G)$ ，且 V_0, V_1, V_2 是满足定理要求的 \bar{S} 的一个三分划。记：

$$\begin{aligned} V_{01} &= V_0 \setminus N_{u_1}, & V_{02} &= V_0 \setminus N_{u_2} \\ V_{10} &= V_1 \setminus N_{u_0}, & V_{12} &= V_1 \setminus N_{u_2}, & V_{102} &= V_1 \setminus N(\{u_0, u_2\}), \\ V_{20} &= V_2 \setminus N_{u_0}, & V_{21} &= V_2 \setminus N_{u_1}, & V_{201} &= V_2 \setminus N(\{u_0, u_1\}). \end{aligned}$$

于是有：

$$\begin{aligned} W(G) = \min \{ & \sum_{i=0}^2 (c(u_i) + W(G(V_i))), c(u_1) + c(u_2) + \sum_{v \in N_{u_0}} c(v) + W(G(V_{20})) \\ & + W(G(V_{10})) + W(G(V_0)), c(u_0) + \sum_{v \in N_{u_1}} c(v) + W(G(V_{21})) + W(G(V_1)) \\ & + W(G(V_{01})), c(u_0) + \sum_{v \in N_{u_2}} c(v) + W(G(V_2)) + W(G(V_{12})) + W(G(V_{02})), \\ & \sum_{v \in N(\{u_0, u_1\})} c(v) + W(G(V_{201})) + W(G(V_{10})) + W(G(V_{01})), \\ & \sum_{v \in N(\{u_0, u_2\})} c(v) + W(G(V_{20})) + W(G(V_{102})) + W(G(V_{02})) \} \end{aligned} \quad (3)$$

对 $|S| = 1$ 和 $|S| = 2$ 也可列出类似于 (3) 的方程求 $W(G)$ ，合称这些方程为方程组 (3)。

命题 1^[4] 设 $\alpha \geq 1, n_1, n_2, \dots, n_k$ 是正整数， $\sum_1^k n_i = n$ ，且对每个 $1 \leq i \leq k$ 都有 $n_i < n/2$ ，则 $\sum_1^k n_i^\alpha \leq 2(n/2)^\alpha$ 。□

命题 2^[4] 记 plf g 的折点个数为 $b(g)$ 。设 f_1 和 f_2 都是 plf ，则 $b(f_1 + f_2) \leq b(f_1) + b(f_2)$ 且 $b(\min(f_1, f_2)) \leq b(f_1) + b(f_2) + 1$ 。□

定理 2 可在 $O(n^3)$ 时间内算出 opg G 的 MVC 集。

证明 设用方程组 (3) 求解所费的时间为 $T(n)$ 。用数学归纳法证明 $T(n) = O(n^3)$ 。在 n 小的时候，这是不成问题的，即有常数 d_1 使得 $T(n) \leq d_1 n^3$ 。关于归纳步证明如下：

最坏情况显然在 $|S| = 3$ 时出现。注意到 (3) 式中 $V_{ijk} \subseteq V_{ij} \subseteq V_i$ 对一切 $0 \leq i, j, k \leq 2, i \neq j \neq k, i \neq k$ 真。故以 (3) 式求各 $W(G(V_i)), W(G(V_{ij})), W(G(V_{ijk}))$ 至多费去 4 倍于求 $W(G(\bar{S}))$ 所需的时间。设 $G(\bar{S})$ 是由尺寸分别为 n_1, n_2, \dots, n_k 的连通分枝组成，于是有 $\sum_1^k n_i = n - 3$ 。据定理 1，对 $1 \leq i \leq k$ 有 $n_i < n/2$ ，故

$$T(n) \leq 4 \sum_1^k T(n_i) + d(n)$$

这里 $d(n)$ 是其它操作所费的时间，即：求 G 的中心集点 S ，对 \bar{S} 求分划 V_0, V_1, V_2 ，求邻集、交集、并集和顶点的权和等，这都可在 $O(n^2)$ 时间内完成。

故有常数 d_2 使得

$$\begin{aligned} T(n) &\leq 4 \sum_1^k T(n_i) + d_2 n^2 \\ &\leq 4d_1 \sum_1^k n_i^3 + d_2 n^2 && \text{(归纳假设)} \\ &\leq 4d_1 * (2((n-1)/2)^3) + d_2 n^2 && \text{(命题 1)} \end{aligned}$$

所以，只要令 $d_1 > d_2$ 即有 $T(n) \leq d_1 n^3$ 。□

下面讨论 c 是参数 t 的线性函数时的情况。设尺寸为 n 的 opg G 的 $W(G,t)$ 的折点个数至多为 $b(n)$ 。利用方程组(3)可以得出

定理 3 $b(n) = O(n^{\log_2 12})$ 。

证明 施数学归纳法于 n 。只要讨论归纳步即可。最坏情况仍出现在 $|S|=3$ 的时候。对于 $0 \leq i \leq 2$, 令 $|V_i| = n_i$, 于是 $\sum_0^2 n_i = n - 3$, $n_i < n/2$ 。注意(3)式中参加 \min 运算的有6个项。每项里顶点权求和所得的函数的折点数为0, 据命题2, $\sum_0^2 W(G(V_i, t))$ 的折点个数围界于 $\sum_0^2 b(n_i)$, 其余各项的折点个数也不超过这个界。

故由命题2有

$$\begin{aligned} b(n) &\leq 6 \sum_0^2 b(n_i) + 5 \\ &\leq 6 * (2 * ((n-1)/2)^{\log_2 12} + 5) \quad (\text{命题 1}) \\ &\leq (n-1)^{\log_2 12} + 5 \leq n^{\log_2 12} \quad (\text{只要 } n \text{ 够大}) \quad \square \end{aligned}$$

用参数、函数值对偶序列表示 p 的 f 如下:

$$[k; (0, f(0)), (t_1, f(t_1)), \dots, (t_{k+1}, f(t_{k+1}))]$$

其中 k 是 f 的折点个数。 $t_1 < t_2 < \dots < t_k$ 是 f 的折点。执行求和运算 $\sum_1^m f_i$ 时, 先对 $\{f_1, f_2, \dots, f_m\}$ 排序, 使得 $n_1 \leq n_2 \leq \dots \leq n_m$ 分别是 f_1, f_2, \dots, f_m 的折点个数, 对 $1 \leq j < m$, 求 $\sum^j f_i$ 之后下一步求 $\sum^j f_i + f_{j+1}$ 。于是保证能在 $O(m^2 + \sum_1^m n_i)$ 的时间内完成 $\sum_1^m f_i$ 的运算。设按这种方法使用方程组(3)求尺寸为 n 的 opg G 的MVC解所费的时间为 $TP(n)$, 则有

定理 4 $TP(n) = O(n^{\log_2 12})$ 。

证明 设 $G(\bar{S})$ 由尺寸分别为 n_1, n_2, \dots, n_k 的连通分枝组成。和定理2相似, 有

$$TP(n) \leq 4 \sum_1^k TP(n_i) + O(n^{\log_2 12}) \quad (4)$$

且 $\sum_1^k n_i \leq n - 1$, 对每个 $1 \leq i \leq k$, $n_i < n/2$ 。(4)式右边中的第一部分表示递归调用方程组(3)所费的时间, 第二部分表示求和及求最小者等所费的时间。据此易知定理成立。□

3 注 记

设 k 是某个常数。如可在多项式时间内求出 G 及其子图的 k 阶中心点集, 则MVC问题就可在多项式时间内求解。问题:

- (1) 除 opg 之外, 哪类图有这种性质?
- (2) $b(n)$ 的贴界为多少?

参 考 文 献

- [1] Garey M et al., *Computers and Intractability: A Guide to the Theory of NP-Completeness*, Freeman, San Francisco, 1979
- [2] Gusfield, D *Memo UCB/ERL M 80/22 Electronics Research Laboratory*, Univ. of California, Berkely, CA., May 1980
- [3] Aho A V et al., *The Design and Analysis of Computer Algorithms*, Addison-Wesley Reading, MA., 1976
- [4] D. Fernández-Baca et al., *J. of Algorithms*, 10 (1989), 381~402

An Algorithm for Parametric Outerplanar Graphs

Zhu Binghuan*

Abstract

Let G be a n -vertex outerplanar graph whose vertex weights are linear functions of the parameter t . We prove that the number of breakpoints of the minimal vertex cover cost function is bounded by $O(n \log_2^2)$. Also, an $O(n \log_2^2)$ algorithm for finding the solution has been designed.

keywords outerplanar graph, vertex cover, NP-completeness

* Department of Computer Science