

一类非光滑与光滑最优化 问题之间的关系*

王大麒
(数学系)

摘 要

研究Banach空间中一类非光滑最优化问题的最大值和解集与光滑最优化问题的最大值和解集之间的关系,得到了一系列结果。

关键词 光滑最优化,非光滑最优化,最大值,解集,Banach空间

1 符号、假设和问题

1.1 本文符号

设 (D, d) 是度量空间, $D \subset X, f, g_1, \dots, g_m: X \rightarrow R^1$ (数直线), \bar{A} 表 A 的闭包。

$g(x) = \min \{g_1(x), \dots, g_m(x)\} (x \in X), F(x) = \min \{f(x), g(x)\} (x \in X),$

$M = \max \{F(x) | x \in D\}, M_1 = \max \{f(x) | x \in D\}, M_2 = \max \{g(x) | x \in D\},$

$m = \min \{g(x) | x \in D\}, \Delta_0 = M_0 - m (M_0 \geq M_2), D_2 = D - D_1,$

$D_1 = \{x | x \in D, f(x) \leq g(x)\}, \lambda_1 = \max \{f(x) | x \in D_1\}, \lambda_2 = \sup \{g(x) | x \in D_2\},$

$D(\lambda) = \{x | x \in D, g(x) \geq \lambda\}, \varphi(\lambda) = \max \{f(x) | x \in D(\lambda)\},$

$E(\lambda) = \{x | x \in D, g(x) > \lambda\},$

$D^*(\lambda) = \{x | x \in D(\lambda), f(x) = \varphi(\lambda)\}, D^*(f) = \{x | x \in D, f(x) = M_1\},$

$D_1^*(f) = \{x | x \in D_1, f(x) = \lambda_1\},$

$\delta_1(\lambda, \lambda_0) = \sup \{d(x, D(\lambda_0)) | x \in D(\lambda)\}, \delta_1(\lambda_0, \lambda) = \sup \{d(x, D(\lambda)) | x \in D(\lambda_0)\},$

$\delta_2(\lambda, \lambda_0) = \sup \{d(x, D(\lambda_0)) + d(x, D(\lambda)) | x \in D(\lambda) \cup D(\lambda_0)\},$

$\delta^*(\lambda, \lambda_0) = \sup \{d(x, D^*(\lambda_0)) | x \in D^*(\lambda)\}, I = \{1, 2, \dots, m\}.$

1.2 本文假设

假设 I 设 (D, d) 是Banach空间 $(X, \|\cdot\|)$ 中的紧集 D 构成的度量空间, $d(x, y) = \|x - y\|, f, g_1, \dots, g_m: X \rightarrow R^1$, 连续, 在 D 上处处有梯度, 且

$$\begin{aligned} m = \min \{g(x) | x \in D\} &= \min \{f(x) | x \in D\} = \min \{g_1(x) | x \in D\} \\ &= \dots = \min \{g_m(x) | x \in D\}. \end{aligned}$$

本文1989年10月16日收到

• 国家自然科学基金和广东省科学基金资助项目

假设 II $\lambda_1 > g(x) (x \in D_2)$.

假设 III $\lambda_1 > f(x) (x \in D_2)$.

假设 IV g 具有性质: $\delta_2(\lambda, \lambda^*) \rightarrow 0 (\lambda \rightarrow \lambda^*, \lambda \in (-\infty, M_2])$.

假设 V $\exists x_1 \in D_1$, 使 $g(x_1) > g(x) (x \in D_2)$.

1.3 本文研究的问题

问题 I $\max_{x \in D} F(x)$, 其解集记为 D^* ; 此问题, 一般为非光滑问题.

问题 II 光滑问题

$$\begin{cases} \max & \lambda \\ \text{s.t.} & f(x) - \lambda \geq 0 \\ & g_i(x) - \lambda \geq 0 (i \in I), \end{cases} \text{其解集记为 } (D_1^*, \lambda^*).$$

问题 III 光滑问题

$$\begin{cases} \max & f(x) \\ \text{s.t.} & g_i(x) \geq \lambda (i \in I), \end{cases} \text{其解集记为 } D^*(\lambda).$$

问题 IV 光滑问题

$$\max_{x \in D} f(x), \text{ 其解集记为 } D^*(f).$$

2 问题 I 与 II、III、IV 间的关系

下面的定理 1 ~ 3 及其系分别阐述问题 I 的解集 D^* 和最大值 M 与问题 II、III 和 IV 的解集和最大值之间的关系.

引理 1 若假设 V 成立, 则有

(1) 当 $\exists x_2 \in D_2$ 使 $\lambda_1 \leq g(x_2)$ 时, $\varphi(\lambda)$ 在 λ_2 处不连续.

(2) 当 $\varphi(\lambda)$ 在 λ_2 处连续时, 有 ① 假设 I 成立; ② $\lambda_1 \geq \lambda_2$.

证明 (1) 由假设和 λ_2 定义, 有 $\lambda_1 \leq g(x_2) \leq \lambda_2$. 现分二种情形证明:

i) $D(\lambda_2) \cap D_2 = \emptyset$: 这情形由 λ_2 定义, 有 $g(x_2) < \lambda_2$, 且 $\forall \lambda \in [g(x_2), \lambda_2)$, $\exists x_\lambda \in D(\lambda) \cap D_2$. 从而由 $D(\lambda)$ 、 D_2 和 $\varphi(\lambda)$ 定义, 有

$$\lambda_1 \leq g(x_2) \leq \lambda \leq g(x_\lambda) < f(x_\lambda) \leq \varphi(\lambda) (\lambda \in [g(x_2), \lambda_2)) \tag{1}$$

但由 λ_2 、 $D(\lambda)$ 、 $\varphi(\lambda)$ 定义和假设, 有

$$\varphi(\lambda) \leq \lambda_1 (\lambda \in [\lambda_2, g(x_1)]) \tag{2}$$

(1) 和 (2) 说明这情形 $\varphi(\lambda)$ 在 λ_2 处不连续.

ii) $D(\lambda_2) \cap D_2 \neq \emptyset$: 由假设推出这时有 $\lambda_2 < g(x_1)$. 现今 $x_2^* \in D(\lambda_2) \cap D_2$, 由 $\lambda_1, \lambda_2, D_2, \varphi(\lambda)$ 定义和 $\varphi(\lambda)$ 单调下降性推出

$$\lambda_1 \leq g(x_2) \leq g(x_2^*) < f(x_2^*) \leq \varphi(\lambda_2) \leq \varphi(\lambda) (\lambda \in (-\infty, \lambda_2]) \tag{3}$$

且 $\varphi(\lambda) \leq \lambda_1 (\lambda \in [\lambda_2, g(x_1)]) \tag{4}$

(3) 和 (4) 说明这情形 $\varphi(\lambda)$ 在 λ_2 处不连续. (1) 证毕.

(2) ① 由 (1) 直接推出; (2) ② 由 (2) ① 直接推出.

引理 2 若 $M_1 \leq M_2$, 则引理 1 的结论成立.

证明 设 $x_1 \in D$ 使 $g(x_1) = M_2$. 但由 M_1 和 D_2 定义有 $g(x_1) = M_2 \geq M_1 \geq f(x) > g(x) \cdot (x \in D_2)$. 这推出 $x_1 \in D_1$. 即假设 V 成立. 由引理 1 知结论正确.

引理 3 设 $A \subset D$, 则 $d(x, A)$ 是 D 上的连续泛函数.

证明 $\forall x \in D, \forall \varepsilon > 0$, 设 $y \in D$ 满足 $d(y, x) < \varepsilon$. 易证

$$d(y, A) - d(x, A) \leq d(y, x) \tag{5}$$

和 $d(x, A) - d(y, A) \leq d(y, x)$ (6)

从而 $|d(y, A) - d(x, A)| \leq d(y, x) < \varepsilon$.

引理 4 若 D 是紧度量空间, $g: D \rightarrow R^1$ 在 D 上连续, 则

$$\delta_1(\lambda, \lambda_0) \rightarrow 0 \quad (\lambda \rightarrow \lambda_0, \lambda < \lambda_0 \in (-\infty, M_2]) \tag{7}$$

证明 用反证法证明. 因若否, 由 $\delta_1(\lambda, \lambda_0)$ 定义, 知存在 $\varepsilon > 0, \lambda_n \rightarrow \lambda_0 (n \rightarrow \infty, \lambda_n < \lambda_0), x_n \in D(\lambda_n)$, 满足 $d(x_n, D(\lambda_0)) \geq \varepsilon$. 但 D 是紧空间, 故有 $\{x_{n_i}\} \subset \{x_n\}$, 使

$$x_{n_i} \rightarrow x_0 \in D (i \rightarrow \infty). \text{ 由引理 3, 有 } d(x_0, D(\lambda_0)) = \lim_{i \rightarrow \infty} d(x_{n_i}, D(\lambda_0)) \geq \varepsilon. \text{ 即}$$

$x_0 \notin \overline{D(\lambda_0)}$. 从而

$$g(x_0) < \lambda_0 \tag{8}$$

但 $x_{n_i} \in D(\lambda_{n_i}),$ 即 $g(x_{n_i}) \geq \lambda_{n_i},$ 而 $\lambda_{n_i} \rightarrow \lambda_0 (i \rightarrow \infty, \lambda_{n_i} < \lambda_0),$ 且 g 连续, 故有

$$g(x_0) = \lim_{i \rightarrow \infty} g(x_{n_i}) \geq \lambda_0 \tag{9}$$

(8) 与 (9) 矛盾. 引理得证.

引理 5 在 D 为紧度量空间, $g: D \rightarrow R^1$ 在 D 上连续, 且 $\lambda_0 \in (-\infty, M_2)$ 的条件下,

有 $\delta_2(\lambda, \lambda_0) \rightarrow 0 (\lambda \rightarrow \lambda_0) \iff D(\lambda_0) = \overline{E}(\lambda_0)$ (10)

特别地, 当 $\lambda^* \in (m, M_2)$ 时, 有

$$\text{假设 } IV \text{ 成立} \iff D(\lambda^*) = \overline{E}(\lambda^*) \tag{11}$$

证明 (10) \Rightarrow : 令 $\lambda \rightarrow \lambda_0 (\lambda > \lambda_0)$. 因 $\delta_2(\lambda, \lambda_0) \rightarrow 0 (\lambda \rightarrow \lambda_0)$, 故

$$\delta_1(\lambda_0, \lambda) = \delta_2(\lambda, \lambda_0) \rightarrow 0 (\lambda \rightarrow \lambda_0, \lambda > \lambda_0).$$

这推出 $D(\lambda_0) = \overline{E}(\lambda_0) (\lambda_0 \in (-\infty, M_2))$.

\Leftarrow : 由引理 4, 知只须对 $\lambda \rightarrow \lambda_0 (\lambda > \lambda_0)$ 情形进行证明. 用反证法证明. 若否, 则 $\exists \varepsilon > 0$ 和 $\lambda_n \downarrow \lambda_0$, 使

$$\delta_1(\lambda_0, \lambda_n) = \delta_2(\lambda_n, \lambda_0) > \varepsilon \tag{12}$$

但 D 紧, g 连续, 推出 $D(\lambda_0)$ 紧; 又由引理 3 知 $d(x, D(\lambda_0))$ 在 D 上连续, 故 $\exists x_n \in D(\lambda_0)$,

使 $d(x_n, D(\lambda_n)) = \delta_1(\lambda_0, \lambda_n) > \varepsilon$ (13)

但 $D(\lambda_0)$ 紧, 故 $\exists \{x_{n_i}\} \subset \{x_n\}$, 使

$$x_{n_i} \rightarrow x_0 \in D(\lambda_0) (i \rightarrow \infty) \tag{14}$$

而由 $\lambda_n \downarrow \lambda_0$, 推出

$$D(\lambda_n) \subset D(\lambda_{n+1}) \subset \dots \subset D(\lambda_0) \tag{15}$$

由 (13) 和 (15) 推出

$$d(x_n, D(\lambda_n)) \geq d(x_{n+1}, D(\lambda_{n+1})) (\forall n) \quad (16)$$

$$\text{和 } d(x_m, D(\lambda_n)) \geq d(x_m, D(\lambda_m)) (n \leq m) \quad (17)$$

由 $d(x, D(\lambda_n))$ 连续性, (14), (17), (13), 得

$$\begin{aligned} d(x_0, D(\lambda_n)) &= \lim_{i \rightarrow \infty} d(x_{n_i}, D(\lambda_n)) \\ &\geq \lim_{i \rightarrow \infty} d(x_{n_i}, D(\lambda_{n_i})) \geq \varepsilon (\forall n) \end{aligned} \quad (18)$$

但 $\lambda_n \downarrow \lambda_0$, $D(\lambda_0) = \bar{E}(\lambda_0)$, 故

$$D(\lambda_0) = \bar{E}(\lambda_0) = \bigcup_{n=1}^{\infty} D(\lambda_n) \quad (19)$$

由 $x_0 \in D(\lambda_0)$, (19), (15) 和 $\lambda_n \downarrow \lambda_0$, 推出 $\exists y_{n_i} \in D(\lambda_{n_i})$, 使

$$d(x_0, D(\lambda_{n_i})) \leq d(x_0, y_{n_i}) \rightarrow 0 (i \rightarrow \infty) \quad (20)$$

(20) 与 (18) 矛盾. 即 \Leftarrow 得证. 从而 (10) 证毕.

而 (11) 是 (10) 的特例, 故也成立.

引理 6 在假设 I 下, $\delta^*(\lambda, \lambda_0)$ 和 $\varphi(\lambda)$ 有

(1) 当 $\lambda_0 \in (-\infty, m)$ 时, 在点 λ_0 处连续, 即

$$\textcircled{1} \delta^*(\lambda, \lambda_0) \rightarrow 0 (\lambda \rightarrow \lambda_0); \quad \textcircled{2} \varphi(\lambda) \rightarrow \varphi(\lambda_0) (\lambda \rightarrow \lambda_0).$$

(2) 当 $\lambda_0 \in [m, M_2]$ 时, 在 λ_0 处左连续, 即

$$\textcircled{1} \delta^*(\lambda, \lambda_0) \rightarrow 0 (\lambda \rightarrow \lambda_0, \lambda < \lambda_0); \quad \textcircled{2} \varphi(\lambda) \rightarrow \varphi(\lambda_0) (\lambda \rightarrow \lambda_0, \lambda < \lambda_0).$$

证明 (1) 因 $\lambda, \lambda_0 \in (-\infty, m]$ 时, $D(\lambda) = D(\lambda_0) = D$. 这推出 $D^*(\lambda) = D^*(\lambda_0)$, $\varphi(\lambda) = \varphi(\lambda_0)$. 从而 (1) 成立.

(2) $\textcircled{1}$ 用反证法证明. 若否, 必存在 $\delta > 0$, $\lambda_n \uparrow \lambda_0$, $x_n \in D^*(\lambda_n)$, 满足

$$d(x_n, D^*(\lambda_0)) \geq \delta (\forall n) \quad (21)$$

而 D 是紧空间, 故 $\exists \{x_{n_i}\} \subset \{x_n\}$, 使得

$$x_{n_i} \rightarrow x^* (i \rightarrow \infty) \quad (22)$$

而由 $\lambda_{n_i} \uparrow \lambda_0$ 和引理 4 知 $x^* \in D(\lambda_0)$. 由 $D(\lambda_0) \subset D(\lambda_{n_i})$ 推出 $f(x_{n_i}) = \varphi(\lambda_{n_i}) \geq \varphi(\lambda_0) = f^*$. 由 f 的连续性, 得

$$f(x^*) = \lim_{i \rightarrow \infty} f(x_{n_i}) \geq f^* \quad (23)$$

由 $x^* \in D(\lambda_0)$ 和 f^* 定义知

$$f(x^*) \leq f^* \quad (24)$$

由 (23) 和 (24) 知 $f(x^*) = f^*$, 即 $x^* \in D^*(\lambda_0)$. 这与 (22) 一起得

$$d(x_{n_i}, D^*(\lambda_0)) \rightarrow 0 (i \rightarrow \infty) \quad (25)$$

(25) 与 (21) 矛盾. 即 (2) $\textcircled{1}$ 得证.

(2) $\textcircled{2}$ 由 g 连续推出 $D(\lambda)$ 是紧空间 D 中的紧集, 又 f 在 D 上连续, 故 $\forall \varepsilon > 0$, $\exists \delta(\varepsilon) > 0$, 使得 $\forall x, y \in D$, $d(x, y) < \delta(\varepsilon)$ 时, 有 $|f(x) - f(y)| < \varepsilon$, 且 $\exists x_\lambda \in D(\lambda)$ 使得 $f(x_\lambda) = \varphi(\lambda)$. 由引理 4 知 $\exists \lambda(\varepsilon) < \lambda_0$, 当 $\lambda \in [\lambda(\varepsilon), \lambda_0]$ 时, 有 $\delta_1(\lambda, \lambda_0) < \delta(\varepsilon)$. 这推出

$\exists y_\lambda \in D(\lambda_0)$ 使 $d(x_\lambda, y_\lambda) < \delta(\varepsilon)(\lambda \in [\lambda(\varepsilon), \lambda_0])$, 又由 $D(\lambda_0) \subset D(\lambda)(\lambda \in [\lambda(\varepsilon), \lambda_0])$ 及 $\varphi(\lambda)$ 定义, 有

$$|\varphi(\lambda) - \varphi(\lambda_0)| = f(x_\lambda) - \varphi(\lambda_0) \leq f(x_\lambda) - f(y_\lambda) < \varepsilon \quad (\lambda \in [\lambda(\varepsilon), \lambda_0])$$

即 (2)② 成立.

定理 1 在假设 I 下, 问题 III 的解和 $\varphi(\lambda)$, 随着 λ 左逼近于 λ^* 而分别逼近于问题 I 的解和 $\varphi(\lambda^*)$, 即

- (1) $\delta^*(\lambda, \lambda^*) \rightarrow 0 \quad (\lambda \rightarrow \lambda^*, \lambda < \lambda^*);$
- (2) $\varphi(\lambda) \rightarrow \varphi(\lambda^*) \quad (\lambda \rightarrow \lambda^*, \lambda < \lambda^*).$

证明 因 $\lambda^* \in [m, M_2]$, 这是引理 6 中 (2) 的特殊情形, 故结论成立.

定理 2 在假设 I 和 IV ($\Leftrightarrow D(\lambda^*) = \bar{E}(\lambda^*)(\lambda^* \in [m, M_2])$ 情形) 下, 问题 III 的解和 $\varphi(\lambda)$, 随着 $\lambda \rightarrow \lambda^*(\lambda \in (-\infty, M_2])$ 而分别趋向于问题 I 的解和 $\varphi(\lambda^*)$, 即

- (1) $\delta^*(\lambda, \lambda^*) \rightarrow 0 \quad (\lambda \rightarrow \lambda^*(\lambda \in (-\infty, M_2]));$
- (2) $\varphi(\lambda) \rightarrow \varphi(\lambda^*) \quad (\lambda \rightarrow \lambda^*(\lambda \in (-\infty, M_2])).$

证明 由引理 6 知本定理只须对 $\lambda \rightarrow \lambda^*(\lambda > \lambda^*)$ 情形进行证明, 而有假设 IV, 这情形的证明和引理 6 的证明是类同的. 从略.

引理 7 若 g 是紧凸集 D 上的连续凹泛函数, 则 $D(\lambda_0) = \bar{E}(\lambda_0) (\lambda_0 \in (-\infty, M_2))$.

证明 由 D 紧 g 连续推出 $D(\lambda_0)$ 紧, 又 $D(\lambda_0) \supset E(\lambda_0)$, 故

$$D(\lambda_0) \supset \bar{E}(\lambda_0) \tag{26}$$

又由 D 紧 g 连续推出 $D(M_2) \ni \phi$. 取 $y \in D(M_2), \forall x \in [D(\lambda_0) - E(\lambda_0)], a \in (0, 1)$, 由 $\lambda < M_2, D$ 凸和 g 是凹函数知

$$g(ay + (1-a)x) \geq ag(y) + (1-a)g(x) > g(x) = \lambda_0 \quad (a \in (0, 1));$$

$$ay + (1-a)x \in E(\lambda_0) \quad (a \in (0, 1)).$$

这推出 $x \in \bar{E}(\lambda_0)$. 从而推出

$$D(\lambda_0) \subset \bar{E}(\lambda_0) \tag{27}$$

由 (26) 和 (27) 得

$$D(\lambda_0) = \bar{E}(\lambda_0).$$

定理 3 在假设 I 下, 问题 I 与 II、III、IV 的解集和最大值有下面关系:

- (1) $\lambda^* = M; \quad (2) \quad D^* = D_1^* \supset D^*(\lambda^*) \ni \phi;$
- (3) 假设 II $\Leftrightarrow \lambda^* = M = \lambda_1 = \varphi(\lambda^*)$, 且 $D^* = D_1^* = D^*(\lambda^*) = D_1^*(f);$
- (4) 假设 III $\Leftrightarrow \lambda^* = M = \lambda_1 = \varphi(\lambda^*) = M_1$, 且 $D^* = D_1^* = D^*(\lambda^*) = D_1^*(f) = D^*(f).$

证明 (1) 因 f, g_1, \dots, g_m 连续, 推出 F 连续, 又 D 紧, 故 $D^* \ni \phi$; 类似地可推出 $(D_1^*, \lambda^*) \ni \phi$. 而由问题 II 和 λ^* 的定义推出 $M \leq \lambda^*$. 但由 M 的定义, 当 $\lambda > M$ 时, 不满足问题 II 的约束, 故 $M \geq \lambda^*$. 从而有 $\lambda^* = M$.

(2) 由 M 的定义和 $\lambda^* = M$, 推出

$$D^* = \{x | x \in D, F(x) = M\} = \{x | x \in D, F(x) = \lambda^*\} \\ = \{x | x \in D, f(x) \geq \lambda^*, g_1(x) \geq \lambda^*, \dots, g_m(x) \geq \lambda^*\} = D_1^* \quad (28)$$

由 D 紧, g 连续, $M = \lambda^*$, 推出 $D(\lambda^*) \neq \phi$ 且紧. 而 f 连续, 故

$$D^*(\lambda^*) \neq \phi \quad (29)$$

由 $M = \lambda^*$ 和 D_2 与 $D^*(\lambda^*)$ 定义, 知当 $D(\lambda^*) \cap D_2 \neq \phi$ 时, 有

$$D^*(\lambda^*) \subset D(\lambda^*) \cap D_2 \subset D^* \quad (30)$$

而当 $D(\lambda^*) \cap D_2 = \phi$ 时, 有

$$D^*(\lambda^*) = D^* \quad (31)$$

(31)、(30)、(29)和(28)一起证明了(2)

(3) 还满足假设 II 时, 由 M 定义推出 $D^* \subset D_1$, $\lambda^* = M = \lambda_1 = \varphi(\lambda^*)$, 从而有 $D^* = D_1^* = D^*(\lambda^*) = D_1^*(f)$; 即 “ \Rightarrow ” 得证. 反之, 由 $\lambda^* = M = \lambda_1$, $D^* = D^*(\lambda^*) = D_1^*(f)$ 推出假设 II 成立, 即 “ \Leftarrow ” 得证.

(4) 还满足假设 III 时, 由 M 的定义推出 $\lambda^* = M = \lambda_1 = \varphi(\lambda^*) = M_1$, 且 $D^* = D_1^* = D^*(\lambda^*) = D_1^*(f) = D^*(f)$; 即 “ \Rightarrow ” 得证. 反之, 由 $\lambda^* = M = \lambda_1 = \varphi(\lambda^*) = M_1$, 且 $D^* = D^*(f) = D_1^*(f)$ 推出假设 III 成立, 即 “ \Leftarrow ” 得证.

系 1 在假设 I 和 V 下, 若 $\varphi(\lambda)$ 在 λ_2 处连续, 则有 $\lambda^* = M = \lambda_1 = \varphi(\lambda^*)$, 且 $D^* = D_1^* = D^*(\lambda^*) = D_1^*(f)$.

证明 由引理 1 知系 1 条件已使假设 II 成立, 故由定理 3 的(3)知本结论成立.

系 2 在假设 I 下, 若 $\varphi(\lambda)$ 在 λ_2 处连续, 且 $M_1 \leq M_2$, 则系 1 结论成立.

证明 由引理 2 知系 2 条件已使假设 II 成立, 从而由定理 3 的(3)知本结论成立.

系 3 把系 1 和 2 中的 “ $\varphi(\lambda)$ 在 λ_2 处连续” 换为 “假设 IV 成立”, 其余不变, 结论仍成立.

证明 因由定理 2 (2) 知 $\varphi(\lambda)$ 在 λ^* 处连续, 又 $\lambda^* = \max\{\lambda_1, \lambda_2\}$, 故假设 II 成立, 从而结论成立. 因若假设 II 不成立, 则 $\exists x_2 \in D_2$ 使 $g(x_2) \geq \lambda_1$, 因而 $\lambda^* = \max\{\lambda_1, \lambda_2\} = \lambda_2$. 这样由引理 1 的(1)知 $\varphi(\lambda)$ 在 $\lambda_2 = \lambda^*$ 处不连续, 矛盾.

系 4 把系 1 和系 2 中的 “ $\varphi(\lambda)$ 在 λ_2 处连续” 换为 “ $M = M_2$ ”, 其余不变, 结论仍成立.

证明 由引理 4 知在假设 I 下, 当 $\lambda^* = M = M_2$ 时, 假设 IV 成立. 因而由系 3 知结论成立.

系 5 在假设 I 和 $D(\lambda^*) = \bar{E}(\lambda^*)$ ($\lambda^* \in [m, M_2]$) 下, 系 1 的结论成立.

证明 因 $\lambda^* \in [m, M_2]$ 推出假设 V 成立. 由引理 5 的(11)式知假设 IV 成立. 从而由系 3 知结论成立.

系 6 在假设 I 下, 若 g 是紧凸集 D 上的凹泛函, 且 $\lambda^* \in [m, M_2]$, 则系 1 结论成立.

证明 由引理 7 知这时有 $D(\lambda^*) = \bar{E}(\lambda^*)$ ($\lambda^* \in [m, M_2]$), 故由系 5 知结论成立.

3 小 结

本文在Banach空间的紧集上分别证明了非光滑最优化问题I的最大值和解集与光滑问题II、III、IV的最大值和解集之间的关系。得到下列结果:(1)在假设I下有:①问题II与I的最大值相等解集相同(定理3的(1)与(2));②问题III在 λ^* 处的解集是问题I的解集的子集(定理3的(2));③当 $\lambda \rightarrow \lambda^*$ ($\lambda < \lambda^*$)时,问题III在 λ 处的解一致收敛于问题I的解(定理1)。(2)在假设I和II下有:问题I、II和III在 λ^* 处的最大值相等解集相同(定理3的(3))。(3)在假设I和IV下有:当 $\lambda \rightarrow \lambda^*$ ($\lambda \in (-\infty, M_2]$)时,问题III在 λ 处的解一致收敛于问题I的解(定理2)。(4)在假设I和III下,问题I、II、IV和III在 λ^* 处的最大值均相等解集均相同(定理3的(4))。(5)给出与假设III的充分条件有关的6个结果(定理3系1—6)。

参 考 文 献

- 1 Ward D E; Journal of Optimization Theory and Applications, 1988; 57 (3): 485~499
- 2 Marian Fabian, Nonlinear Analysis, 1988; 12 (1): 63~74
- 3 Frank H Clarke, Optimization and Nonsmooth Analysis, Wiley-Interscience, New York, 1983
- 4 Bank B, Guddat J; Klatte D, et al. Non-Linear Parametric Optimization, Birkhäuser Verlag, Basel, 1983

Relations between a Class of Nonsmooth Optimization Problems and Smooth Ones

Wang Daqi*

Abstract

This paper presents a series of results on relations among maximal values and solution sets of a class of nonsmooth optimization problems and those of smooth optimization problems in Banach space.

Keyword smooth optimization, nonsmooth optimization, maximal values, solution sets, Banach spaces

* Department of Mathematics