中山大学学报（自然科学版）
第31卷 第4期 ACTA SCIENTIARUM NATURALIUM Vol.31 №.4
1992年 UNIVERSITATIS SUNYATSENI 1992

具有混合约束线性规划问题的一个内点算法*

龚大平 徐树荣
（计算机科学系）

摘要 对具有线性等式和不等式约束的线性规划问题给出了一种内点法，利用寻优方向选择参加投影矩阵计算的约束，使少部分约束参加运算，从而减少了问题的求解规模，有效地提高了求解速度，同时也节省了存贮量。

关键词 线性规划，内点法，寻优方向，投影矩阵

1 引 言

我们知道，内点法[1]的主要计算量就是计算投影矩阵$P=I-(AD)^T(AD^2A^T)AD$，其中D为一个对角阵，A为系数矩阵，I为单位阵。在处理具有线性等式和不等式混合约束的线性规划问题时，事实上，这类线性规划问题是最一般的问题，如果通过松弛变量把线性不等式约束化成等式约束，则要增大问题的求解规模，从而花费较多机时，增大存贮量。本文给出了一种内点法，利用寻优方向来选择参加运算的约束，对线性等式和不等式约束直接地加以统一处理。Sethi and Thompson[3]通过随机生成的实验问题发现，竞争约束仅占总约束的15%～25%。因此本文的方法能有效地减小问题的求解规模，从而减少计算时间，提高效率。我们给出了收敛性证明和部分数值算例。

2 算法描述

考虑如下形式的线性规划问题：

$$(\mathrm{LP})\quad \min\ f(x)=c^Tx \qquad s.t.\begin{cases}Ax\geq b\\ \bar{A}x=\bar{b}\\ x\geq 0\end{cases}$$

其中，A为$m_1\times n$阶矩阵，$\bar{A}$为$m_2\times n$阶矩阵，b为m_1维向量，$\bar{b}$为m_2维向量，c、x分别为n维向量，下面的讨论总假定$m_2<n$。

本文1990年10月12日收到
* 国家自然科学基金和中山大学高等学术研究中心基金的资助项目

令　$Q=\left\{1, 2, \cdots, m_1\right\}$，设$a_i^T$为$A$的第$i$行，$i\epsilon Q$，设$x^k$为（LP)问 题 的一个可行点，$Q_1^k=\left\{i \mid a_i^T x^k=b_i,\ i\epsilon Q\right\}$，$Q_2^k=\left\{i \mid i\epsilon Q\text{且}i\bar{\epsilon}\ Q_1^k\right\}$，分块$A=\begin{bmatrix}A_1\\A_2\end{bmatrix}$，$b=\begin{bmatrix}b_1\\b_2\end{bmatrix}$，且有$A_1x^k=b_1$，$A_2x^k>b_2$。同时总假定$\begin{bmatrix}A_1\\A\end{bmatrix}$为行满秩。

算法IPMH:

给定初始可行内点$x^0>0$，以及充分小的正数$\varepsilon>0$，置$k=0$，令$D_k=\mathrm{diag}(x_1^k, \cdots, x_n^k)$为以$x^k$的元素为对角元的对角阵。

(i)　令$M_k=\begin{bmatrix}A_1\\A\end{bmatrix}$，若$M_k$为空矩阵，则令$P=I$，否则$P=I-(M_kD_k)^T(M_kD_k^2M_k^T)^{-1}\cdot(M_kD_k)$，其中$A_1$为$l\times n$阶矩阵，$I$为$n\times n$阶单位阵。

(ii)　计算寻优方向

$$d^k=-D_kPD_kc=-D_k(I-(M_kD_k)^T(M_kD_k^2M_k^T)^{-1}(M_kD_k))D_kc$$

① 若$d_k=0$，且M_k为空矩阵，则x^k为最优解，停机。

② 若$\|d^k\|_2\leqslant\varepsilon$，而$M_k$不是空矩阵，则计算$\lambda=(M_kD_k^2M_k^T)^{-1}M_kD_kc$，$\lambda$ 为$l+m_2$ 维 向量，将λ分块$\lambda=\begin{bmatrix}u\\v\end{bmatrix}$，$u$为$l$维向量，$v$为$m_2$维向量。

(a)　若$u\geqslant 0$，则转(iii)

(b)　若$u<0$，则选择u的一个负量u_j删去与之相对应的行，校正A_1，转(i)

(c)　若$\|d^k\|_2>\varepsilon$，则转(iii)

(iii)　计算步长

$$\alpha_1=\begin{cases}\infty & \text{若}d^k\geqslant 0\\ \min\limits_{1<i<n}\left\{-\dfrac{x_i^k}{d_i^k}\ \middle|\ d_i^k<0\right\} & \text{若}d^k<0\end{cases}$$

$$\alpha_2=\begin{cases}\infty & \text{若}a_i^Td^k>0\text{，对所有}i\epsilon Q_2^k\text{都成立}\\ \min\limits_{i\epsilon Q_2^k}\left\{-\dfrac{a_i^Tx^k-b_i}{a_i^Td^k}\ \middle|\ a_i^Td^k<0\right\}, & \text{其它}\end{cases}$$

若 $\alpha_1\leqslant\alpha_2$，则$\alpha^k=\theta\alpha_1$，$\theta\epsilon(0,1)$，转(iv)

若 $\alpha_2<\alpha_1$，则$\alpha^k=\alpha_2$，转(iv)

若 $\alpha_1=\alpha_2=\infty$，则(LP)问题无解或有无界解，停机。

(iv)　$x^{k+1}=x^k+\alpha^kd^k$

若 $\|x^{k+1}-x^k\|\leqslant\varepsilon$，则$x^{k+1}$为近似最优解，停机；否则，令$k\leftarrow k+1$，修改$Q_1^k$，$Q_2^k$，校正$A$和$b$的分块，转(i)。

注 1　在②—(b)中，u_j可以选负分量中最小者。若有几个相等的最小分量，则选其下标最小者。

3　算法的收敛性

设$x^k>0$为可行点，$A=\begin{bmatrix}A_1\\A_2\end{bmatrix}$，$b=\begin{bmatrix}b_1\\b_2\end{bmatrix}$，该分块满足$A_1x^k=b_1$，$A_2x^k>b_2$，令$M_k=\begin{bmatrix}A_1\\ \bar{A}\end{bmatrix}$下面总假定$M_k$非空且行满秩，$D_k=\mathrm{diag}(x_1^k,\cdots,x_n^k)$为以$x^k$的元素为对角元的对角阵。记$\lambda^k=(M_kD_k^2M_k^T)^{-1}M_kD_kc$，$d_k=-D_kPD_kc$，$P=I-(M_kD_k)^T(M^kD_k^2M_k^{T-1})M_kD_k$ I为n×n阶单位阵。

引理 1　若$x^k>0$为可行点，则有(i)$P^2=P$；(ii)$P^T=P$

证明　直接计算便可得到结论。

引理 2　在(LP)问题中，设x^*为可行点，$A=\begin{bmatrix}A_1\\A_2\end{bmatrix}$，$\begin{bmatrix}b_1\\b_2\end{bmatrix}$，且$A_1x^*=b_1$，$A_2x^*>b_2$，则$x^*$为(LP)问题的最优解的充要条件是存在$u\geqslant 0$及$w\geqslant 0$，使到$c-A_1^Tu-\bar{A}v-w=0$且$w_i\ x_i^*=0\ (i=1,\cdots,n)$，其中$v$为一个适当的向量。

证明　必要性由Kuhn-Tucker条件直接得到[2]。下面证明充分性。设$x\geqslant 0$是任一可行点，则有$A_1x=b_1$，$\bar{A}x>\bar{b}_2$，那么

$$(c-A_1^Tu-\bar{A}^Tv-w)^T(x^*-x)=c^T(x^*-x)-u^TA_1(x^*-x)-w^T(x^*-x)$$
$$=c^T(x^*-x)+u^T(A_1x-b_1)+w^Tx=0$$

由于$u\geqslant 0$，$A_1x-b_1\geqslant 0$，$x\geqslant 0$，$w\geqslant 0$，因此有$c^Tx^*\leqslant c^Tx$　　证毕。

定理 1　在(LP)问题中，设x^k为可行点，若$d^k\neq 0$，则d^k为点x^k处的寻优方向。

证明　$M_kd^k=-M_kD_kPD_kc=0$，又$d^k\neq 0$，且D_k非奇，则$PD_kc\neq 0$，那么由引理有

$$c^Td^k=-(D_kc)^TPD_kc=-(D_kc)^TP^TPD_kc=-(PD_kc)^T(PD_kc)<0$$

从而可知d^k为x^k处的寻优方向。证毕

定理 2　在(LP)问题中，设x^k为可行点，λ^k对应于M_k的分块为

$\lambda^k=\begin{bmatrix}u\\v\end{bmatrix}$，若$d^k=0$，则

(i) 若$u\geqslant 0$，则x^k为(LP)问题的最优解；

(ii) 若$u<0$，以u_j表示u的负分量，a_j^T表示在A_1中与u_j对应的行向量，$\bar{A}_1$为A_1删去行a_j^T后的矩阵，令$\bar{M}_k=\begin{bmatrix}\bar{A}_1\\ \bar{A}\end{bmatrix}$，$\bar{P}=I-(\bar{M}_kD_k)^T(\bar{M}_kD_k^2\bar{M}_k^T)^{-1}(\bar{M}_kD_k)$，则$\bar{d}^k=-D_k\bar{P}D_kc$为点$x^k$处的寻优方向。

证明　先证明结论(i)，由于

$$d^k=-D_kPD_kc=-D_k^2(c-M_k^T\lambda^k)=-D_k^2(c-A_1^Tu-\bar{A}v)=0$$

又因为D_k非奇，从而有$c-A_1^Tu-\bar{A}^Tv=0$；另一方面，因为有$u\geqslant 0$，$x^k>0$，则取

$w=0$，由引理2可知x^k为(LP)问题的最优解。

再证结论(ii)。先用反证法推出$\bar{P}D_kc\neq 0$

假设$\bar{P}D_kc=0$，令 $\overline{\lambda^k}=(\bar{M}_kD_k^2\bar{M}_k^T)^{-1}(\bar{M}_kD_k)D_kc$，则有

$\bar{P}D_kc=D_kc-D_k\bar{M}_k^T\overline{\lambda^k}=D_k(c-\bar{M}_k^T\overline{\lambda^k})=0$ 即有

$$c-\bar{M}_k^T\overline{\lambda^k}=0 \tag{1}$$

又
$$A_1^Tu+\bar{A}^Tv=\begin{pmatrix}\bar{A}_1\\ \bar{A}\\ a_j^T\end{pmatrix}^T\begin{pmatrix}u\\ v\\ u_j\end{pmatrix}=\begin{pmatrix}\bar{M}_k\\ \\ a_j^T\end{pmatrix}^T\begin{pmatrix}\tilde{\lambda}\\ \\ u_j\end{pmatrix}=\bar{M}_k^T\tilde{\lambda}+u_ja_j$$

其中 $\tilde{\lambda}=\begin{bmatrix}\bar{u}\\ v\end{bmatrix}$，$u=\begin{bmatrix}\bar{u}\\ u_j\end{bmatrix}$；另一方面，由结论(i)有：

$$c-\bar{M}_k^T\tilde{\lambda}-u_ja_j=c-A_1^Tu-\bar{A}^Tv=-0 \tag{2}$$

把(1)代入(2)式有：$\bar{M}_k^T(\overline{\lambda}^k-\tilde{\lambda})-u_ja_j=0$ (3)

由(3)可知，矩阵M_k不是行满秩的，和假设矛盾。因此有$\bar{P}D_kc\neq 0$，从而$\bar{d}^k=-D_k\bar{P}D_kc\neq 0$，由定理1可知$\bar{d}^k$为寻优方向。 证毕

推论1 在(LP)问题中，设$x^k>0$为可行点，ε为一给定的充分小的正数，若$\|d^k\|\leqslant\varepsilon$，其它假设同定理2中的(ii)，则$\bar{d}^k$为点$x^k$处的寻优方向。

证明 若$d^k=0$，则在定理2中已证明。

若 $d^k\neq 0$，则由D_k非奇异，可知$PD_kc\neq 0$，于是$D_kc-[(M_kD_k)^T(M_kD_k^2M_k^T)^{-1}\cdot M_kD_k]D_kc\neq 0$，即$D_kc$不属于由$M_kD_k$的行构成的空间。又因为$\bar{M}_kD_k$的行构成的空间包含在$M_kD_k$的行构成的空间中，那么$D_kc$也不属于由$\bar{M}_kD_k$的行构成的空间，从而$\bar{P}D_kc\neq 0$，由定理1可知$\bar{d}^k$为点$x^k$处的寻优方向。证毕

定理3 设$\{x^k\}$是由算法IPMH产生的可行解序列，则$\{x^k\}$使目标函数值单调下降。

证明 由定理1，定理2及其推论1可直接得到。

引理3 假设(LP)问题有有界解，$\{x^k\}$是由算法DCCI产生的可行解序列，则$\lim\limits_{k\to\infty}\|PD_kc\|=0$。

证明 令$Z^k=c^Tx^k$，那么$Z^{k+1}=c^Tx^{k+1}=Z^k-\alpha^k\|PD_kc\|^2$，由定理3可知$Z^k$是单调下降的，且有下界，因此$\{Z^k\}$收敛，设其极限为$\overline{Z}$，则$\lim\limits_{k\to\infty}Z^k=\bar{z}$，从而由$Z^k=Z^{(0)}-\sum\limits_{l=0}^{k-1}\alpha^l\cdot\|PD_kc\|^2$可知，$\lim\limits_{k\to\infty}\|PD_kc\|=0$

引理4 假设同引理3，令$r^k=c-M_k^T(M_kD_k^2M_k^T)^{-1}M_kD_kc$，则$\{r^k\}$有收敛子列。

证明　由于$\{Z^k\}$收敛，因此$\{x^k\}$有收敛子列，又$x^{k+1}=x^k-\alpha^k D_k^2 r^k$，那么$\{r^k\}$有收敛子列。

引理 5　假设同引理 4，设$\bar{x}$为$\{x^k\}$的任一收敛子列的极限，$\bar{r}$为$\{r^k\}$对应于$\{x^k\}$的该收敛子列的极限，则$\bar{x}_i\bar{r}_i=0\ (i=1,\cdots,n)$，且若有$i_0$使$\bar{x}_{i_0}=0$，则$\bar{r}_{i_0}>0$。

证明　因为$PD_kc=D_kr^k$，因此直接由引理 3 有$\bar{x}_i\bar{r}_i=0\ (i=1,\cdots,n)$。下面证明第 2 个结论。

假设有i_0使$\bar{x}_0=0$，且$\bar{r}_{i_0}\leqslant 0$，设x^{k_l}为收敛于$\bar{x}$的收敛子列，则对任意给定的$\delta>0$，存在一个$\bar{k}>0$，使得当$k_l>\bar{k}$时有$\|x^{k_l}-\bar{x}\|<\delta$，且$r_{i_0}^{k_l}\leqslant 0$，因此对所有$k_l>\bar{k}$有$d_{i_0}^{k_l}=-(x_{i_0}^{k_l})^2 r_{i_0}^{k_l}\geqslant 0$，从而由$x^{k+1}=x^k+\alpha^k d^k$可知，$x_{i_0}^{k_l}\geqslant x_{i_0}^{\bar{k}}>0$，对所有的$k_l>\bar{k}$都成立，这显然与$\lim\limits_{k_l\to\infty}x_{i_0}^{k_l}=\bar{x}_{i_0}=0$矛盾，从而得证。

引理 6　假设同引理 3，设$\bar{x}$为$\{x^k\}$的任一收敛子列的极限，则存在u、v及$w\geqslant 0$，使$c-A_1^Tu-\bar{A}v-w=0$，且$w_i\cdot\bar{x}_i=0$，其中A_1满足$A=\begin{bmatrix}A_1\\A_2\end{bmatrix}$，$b=\begin{bmatrix}b_1\\b_2\end{bmatrix}$，$A_1\bar{x}=b_1$，$A_2\bar{x}>b_2$。

证明　由引理 3 可知$\lim\limits_{k\to\infty}\|PD_kc\|=0$，即有

$$\bar{D}(c-\bar{M}^T\bar{\lambda})=\bar{D}(c-A_1^Tu-\bar{A}v)=\bar{D}\bar{r}=0 \tag{4}$$

其中$\bar{D}=\mathrm{diag}(\bar{x}_1,\cdots,\bar{x}_n)$，$\bar{M}$，$\bar{\lambda}$分别为$M_k$、$\lambda_k$的极限，由引理 3 可知$\bar{r}\geqslant 0$且$\bar{x}_i\bar{r}_i=0$，$i=1,\cdots,n$，取$w=\bar{r}$，由(4)式可知有$c-A_1^Tu-\bar{A}v-w=\bar{r}-w=0$。

定理 4　假设同引理 3，则或经有限次迭代得最优解，或产生一无穷序列，它的任一收敛子列的极限都是(LP)问题的最优解

证明　若算法IPMH经有限步迭代后终止，则由算法及定理 2 可知，得到的一定是(LP)问题的最优解。

若$\{x^k\}$是一个无穷序列，设x^*为$\{x^k\}$的任一收敛子列的极限，则由引理 6 及引理 2 可知，我们只要证明$u\geqslant 0$即可。

由于$\{x^k\}$有界，因此由引理 3 有：对于任意给定的$\varepsilon>0$，存在$k_0>0$，对任意$k>k_0$都有$\|d^k\|<\varepsilon$，从而由算法可知，当$k>k_0$后，最多经过有限次迭代有$u^k\geqslant 0$，即存在$\bar{k}\geqslant 0$，使对一切$k\geqslant\bar{k}+k_0$都有$u^k\geqslant 0$，从而$\lim\limits_{k\to\infty}u^k=u\geqslant 0$，证毕。

4　初始可行点的选取

本节讨论初始内点x^0的选取问题，并讨论相容性问题。

现在的问题是求：

$$(\mathrm{IFP})\begin{cases}Ax\geqslant b\\ \bar{A}x=\bar{b}\\ x\geqslant 0\end{cases}$$

的一个内点。

引进一个变量ξ，则(IFP)就转化为一个(LP)问题，事实上，设$\tilde{x}>0$，则有辅助问题

$$\min f(x)=\xi$$

$$(\mathrm{LP})' \qquad \text{s.t.}\begin{cases}Ax+(b-A\tilde{x}+\sigma e)\xi\geqslant b\\ \bar{A}x+(\bar{b}-\bar{A}\tilde{x})\xi=\bar{b}\\ x\geqslant 0,\ \xi\geqslant 0\end{cases}$$

其中

$$e=(1,1,\cdots,1)^T\text{为}m_1\text{维向量} \tag{5}$$

$$\sigma=\max(0,\max_{1<i<m_1}(a_i^T\tilde{x}-b_i))+\theta_1\ (\theta_1\ \text{为一个给定的正常数}) \tag{6}$$

显然可以利用算法IPMH来求解这个辅助问题。这里$\binom{\tilde{x}}{1}$就是问题(LP)′的一个初始可行内点，例如可取$\tilde{x}=(1,1,\cdots,1)^T$。如果原问题(IFP)有解$x^0$，则$\binom{x^0}{0}$显然是问题(LP)′的解；反之，如果(LP)′有解，且解为$\binom{x^0}{0}$，则x^0是(IFP)的解。若(LP)′有解，但解为$\binom{x_0}{\xi_0}$，又$\xi_0>0$，则原问题(IFP)不相容。事实上，由(5)、(6)知：

$$b-A\tilde{x}+\sigma e>0 \tag{7}$$

在(LP)′中，注意到式(7)及$\xi_0>0$，就可以知道(IEP)为不相容系统。

5 算例

例1 $\min f(x)=-765.9x_1-984x_2-568.5x_3-1200x_4$

$$\text{s.t.}\begin{cases}Ax\geqslant b\\ x\geqslant 0\end{cases}$$

$$A=\begin{pmatrix}-88.791 & 0 & 0 & 0\\ -61.199 & -147.68 & 0 & 0\\ -50.193 & -112.204 & -26.53 & 0\\ -29.457 & -58.459 & -15.011 & -196.737\\ -1 & 0 & 0 & 0\\ 0 & -1 & 0 & 0\\ 0 & 0 & -1 & 0\\ 0 & 0 & 0 & -1\\ 1 & 0 & 0 & 0\\ 0 & 1 & 0 & 0\\ 0 & 0 & 1 & 0\\ 0 & 0 & 0 & 1\end{pmatrix}\quad b=\begin{pmatrix}-54.172\\ -70.2\\ -72.9\\ -98.805\\ -1\\ -1\\ -1\\ -1\\ 0.1\\ 0.1\\ 0.1\\ 0.1\end{pmatrix}$$

例 1 是美国南伯拉特河上 4 个城市净化处理厂建设规模的最优化问题，也是一个广泛用来测试线性规划算法效率的例子。从初始点$x^0=(10.3,\ 0.12,\ 0.15,\ 0.18)^T$出发，文[4]中的Karmarkar及其修正方法分别要迭代109和65次才能得到近似最优解，而本文的方法仅用12个约束中的 4 个迭代 4 次就得到了最优解。其最优解为0.6101069, 0.1403417，1.0，0.2928673)^T，目标值为-1525.31795608

例 2，取自文[6]。

取$x_i=1.0(i=1,\ \cdots,\ 9)$，$x_j=0.05(j=10,\ 11)$为初始可行点，利用IPMH，包括等式约束在内，仅用15个约束中的 7 个，迭代11次就得到了最优解，而文[5]中的方法利用所有的15个约束也要迭代11次。

由以上两个例子可见，IPMH算法的效率是很高的，尤其是在大规模的混合约束问题的计算中更能显示出它的优越性。

参 考 文 献

1 Wei Zi Luan. An Interior Point Method for Linear Programming, Journal of Computational Mathematics, 1987, 4 : 342～351

2 何旭初，孙麟平编著. 约束最优化方法. 南京：南京大学出版社，1986 88～130

3 Karwan M H, Lotfi V, Telgen J, Zionts S. *et al*. Redundanty in Mathematical Programming, Springer, Berlin Heilberg, New York Tokey, 1983

4 刁在筠. Karmarkar算法的一个变形，高校应用数学学报，1987， 1 : 41～56

5 Nie Yi yong, Xu Shu-rong. Isometric Plane Algorithm for Linear Programming. Journal of Computational Mathematics, 1991, 9 (3): 262～272

6 Vasek Chvátal, Linear programming, W. H. Freeman and Company, 1983, 47, 181, 197, 254

An Interior Point Method for Solving Linear Programming with Hybrid Linear Constraints

*Xu Shurong**　*Gong Daping*

abstract An interior point method for solving linear programming with hybrid linear constraints is presented. The method can uniformly treat equality and ine quality constraints, and can also choose a few candidate constraints to take part in the projective computation using its descending direction. In this way, the problem scale can highly be reduced, especially for large scale problem. Numerical tests have snown that our algorithm can effectively improve the convergence rate The convergence proof is presented too.

Keyworde linear programming, interior point method, search direction, projective matrix

* Department of Computer Science