中山大学学报(自然科学版)
第33卷 第1期 ACTA SCIENTIARUM NATURALIUM Vol. 33 No. 1
1994年 1月 UNIVERSITATIS SUNYATSENI Jan. 1994

门限自回归模型参数估计的强收敛速度*

宋心远 邓集贤

(中山大学数学系，广州 510275)

摘 要 对门限自回归模型在给定阶数、门限及延迟参数的假定下，继讨论了其参数估计的强相容性后，本文进一步得到了此估计的强收敛速度.

关键词 门限自回归，强相容性，收敛速度

分类号 O211.61

1 一维一阶一个门限的自回归模型

考虑模型

$$Z_t=a_1Z_{t-1}^{+}+a_2Z_{t-1}^{-}+\varepsilon_t \tag{1}$$

其中，白噪声 $\{\varepsilon_t\}$ 的假设同〔1〕.

Petrucelli 和 Woolford[1]讨论了此模型参数估计的强相容性，得到以下结果：

在条件

$$a_1<1,\quad a_2<1,\quad a_1a_2<1 \tag{2}$$

下，系数 a_1，a_2 及白噪声方差 σ^2 的强相容估计为

$$\hat{a}_1=a_1+\left(\sum_{t=1}^{n}Z_{t-1}^{+}\varepsilon_t\right)\Big/\left(\sum_{t=1}^{n}Z_{t-1}^{+2}\right)$$

$$\hat{a}_2=a_2+\left(\sum_{t=1}^{n}Z_{t-1}^{-}\varepsilon_t\right)\Big/\left(\sum_{t=1}^{n}Z_{t-1}^{-2}\right)$$

$$\hat{\sigma}^2=\frac{1}{n}\sum_{t=1}^{n}\varepsilon_t^2-(\hat{a}_1-a_1)n^{-1}\sum_{t=1}^{n}Z_{t-1}^{+}\varepsilon_t-(\hat{a}_2-a_2)n^{-1}\sum_{t=1}^{n}Z_{t-1}^{-}\varepsilon_t$$

下面给出这些强相容估计的收敛速度.

定理1 在条件（2）下，若 $E\varepsilon_t^p<\infty$，且 $E|Z_t|^p<c$ 其中 $p>2$，c 为一常数，则

收稿日期：1992-08-16

* 国家自然科学基金及国家教委博士点基金资助项目

(C)1994-2019 China Academic Journal Electronic Publishing House. All rights reserved. http://www.cnki.net

$$\hat{a}_1-a_1=o\left(n^{-\frac{1}{2}}(\log n)^{\frac{1}{p}}(\log\log n)^{\frac{1+\delta}{p}}\right)\quad a.s.$$

$$\hat{a}_2-a_2=o\left(n^{-\frac{1}{2}}(\log n)^{\frac{1}{p}}(\log\log n)^{\frac{1+\delta}{p}}\right)\quad a.s.$$

其中 $\delta>0$

证明 仅证第一式.

由〔1〕已经知道

$$\frac{1}{n}\sum_{t=1}^{n}Z_{t-1}^{+2}\longrightarrow E(Z_1^{+2})>0\quad a.s.$$

故只须讨论 $\frac{1}{n}\sum_{t=1}^{n}Z_{t-1}^{+}\varepsilon_t\longrightarrow 0$, $a.s.$ 的速度.

现令

$$S_n=\sum_{t=1}^{n}Z_{t-1}^{+}\varepsilon_t\triangleq\sum_{t=1}^{n}X_t$$

$$F_n=\sigma\{Z_{t-1}^{+}\varepsilon_t,\ t\leqslant n\}$$

容易验证 (S_n, F_n) 是一个鞅差序列.

由 Burkholder's 不等式,

$$P(\max_{t\leqslant n}|S_t|>\Psi(n))\leqslant C\Psi^{-p}(n)E\left|\sum_{t=1}^{n}x_t^2\right|^{\frac{p}{2}}(p>1)$$

再由 Hölder 不等式

$$\sum_{t=1}^{n}X_t^2\leqslant\left(\sum_{t=1}^{n}|X_t|^p\right)^{\frac{2}{p}}\cdot n^{1-\frac{2}{p}}\quad(p>2)$$

从而

$$E\left|\sum_{t=1}^{n}X_t^2\right|^{\frac{p}{2}}\leqslant n^{\frac{p}{2}-1}\cdot\left(\sum_{t=1}^{n}E|X_t|^p\right)\leqslant C\cdot n^{\frac{p}{2}}$$

$$p(\max_{t\leqslant n}|S_t|>\Psi(n))\leqslant C\Psi^{-p}(n)\cdot n^{\frac{p}{2}}$$

现取

$$\Psi(n)=n^{\frac{1}{2}}(\log n)^{\frac{1}{p}}(\log\log n)^{\frac{1+\delta}{p}}\quad(\delta>0)$$

则

$$p(\max_{t\leqslant n}|S_t|>\Psi(n))\leqslant C/\left[(\log n)(\log\log n)^{1+\delta}\right]$$

对任给的 $\varepsilon>0$,取子列 $n_k=a^k$ $(a>1)$,则有

$$p(\max_{t\leqslant n_k}|S_t|\geqslant\varepsilon\Psi(n_k))\leqslant C/\left[(\log n_k)(\log\log n_k)^{1+\delta}\right]$$

从而

$$\sum_{k=1}^{\infty}p\left(\max_{t\leqslant n_k}\frac{|S_t|}{\Psi(n_k)}\geqslant\varepsilon\right)\leqslant\sum_{k=1}^{\infty}\frac{C}{k(\log k)^{1+\delta}}<\infty$$

由 Borel-Cantelli 引理

$$\overline{\lim_{k\to\infty}}\left[\max_{t\leqslant n}\frac{|S_t|}{\Psi(n_k)}\right]\leqslant\varepsilon\quad a.s.$$

又以任意的 n,总存在 K,使得 $n_k\leqslant n<n_{k+1}$ 于是,

$$\frac{|S_n|}{\Psi(n)}\leqslant\left[\max_{t\leqslant n_{n+1}}|S_t|/\Psi(n_{n+1})\right]\left[\Psi(n_{n+1})/\Psi(n_k)\right]$$

(C)1994-2019 China Academic Journal Electronic Publishing House. All rights reserved. http://www.cnki.net

其中

$$\frac{\Psi\ (n_{k+1})}{\Psi\ (n_k)}=a^{\frac{1}{2}}\ (1+\frac{1}{k})^{\frac{1}{p}}\ \{\frac{\log\ (k+1)\ +\log\ \log a}{\log k+\log\ \log a}\}^{\frac{1+\delta}{p}}\underset{k\to\infty}{\longrightarrow}a^{\frac{1}{2}}$$

故当 k 充分大时，存在常数 c，使得

$$\frac{\Psi\ (n_{k+1})}{\Psi\ (n_k)}<c$$

从而当 n 充分大时，

$$\frac{|S_n|}{\Psi\ (n)}<c\cdot\max_{t\leqslant n_{k+1}}|S_t|/\Psi\ (n_{k+1})$$

所以

$$\overline{\lim_{n\to\infty}}\frac{|S_n|}{\Psi\ (n)}\leqslant c\cdot\varepsilon\qquad \text{a. s.}$$

由 ε 的任意性知，

$$\overline{\lim_{n\to\infty}}\frac{|S_n|}{\Psi\ (n)}=o\qquad \text{a. s.}$$

即

$$\frac{1}{n}\sum_{t=1}^{n}Z_{t-1}^{+}\varepsilon_t=o(\frac{\Psi(n)}{n})$$
$$=o(n^{-\frac{1}{2}}(\log n)^{\frac{1}{p}}(\log\ \log n)^{\frac{1+\delta}{p}})\qquad \text{a.s.}$$

也即

$$\hat{a}_1-a_1=o\ (n^{-\frac{1}{2}}\ (\log n)^{\frac{1}{p}}\ (\log\ \log n)^{\frac{1+\delta}{p}})\qquad \text{a. s.}$$

其中 $\delta>0$，$p>2$.

〔注〕　为方便起见，上述证明中不同的常数均用 c 表示.

下面给出一个关于 $\hat{a}_i$（$i=1$，2）收敛速度更精细的结果.

定理 2　在条件（2）下，若 Z_t 平稳且二阶矩存在，则

$$\hat{a}_i-a_i=O\ (\sqrt{\frac{\log\ \log n}{n}})\qquad \text{a. s.}\qquad (i=1,\ 2)$$

证明　由于 Z_t 平稳，$\varepsilon_t\,i.\ i.\ d.$ 且 $\{Z_{t-1}\}$ 与 $\{\varepsilon_t\}$ 独立，故 $\{Z_t\}$ 是遍历的，从而 $\{X_t\}$ 作为一个平稳序列也是遍历的，不难验证 $\{X_t\}$ 还是一个鞅差序列，并且，若 $S_n=\sum_{t=1}^{n}X_t$，则

$$\overline{\lim_{n\to\infty}}\frac{|S_n|}{\sqrt{2n\log n}}\leqslant 1\qquad \text{a.s.}$$

所以

$$\frac{1}{n}S_n=O\ (\sqrt{\frac{\log\ \log n}{n}})\qquad \text{a.s.}$$

即
$$\hat{a}_i-a_i=O\ (\sqrt{\frac{\log\ \log n}{n}}))\qquad \text{a.s.}\qquad (i=1,\ 2)$$

为了讨论 $\hat{\delta}^2$ 的收敛速度，我们将 stout[2]的数系 5.2.1 写成如下引理形式

引理 1　若$\{X_t\}$为i.i.d. 且 $EX_t=0$，$0<E|X_t|^{2+\delta}<\infty\quad(\delta>0)$，令 $S_n=\sum_{t=1}^{n}X_t$，

(C)1994-2019 China Academic Journal Electronic Publishing House. All rights reserved.　http://www.cnki.net

则

$$\overline{\lim_{n\to\infty}}\{S_n/(2nEx_1^2\log\log nEx_1^2)^{1/2}\}=1 \qquad \text{a.s.}$$

定理3 在定理2的条件下，若还有

$$0<E|\varepsilon_t^2-\sigma^2|^{2+\delta}<\infty \qquad (\delta>0)$$

则

$$\hat{\sigma}^2-\sigma^2=O\left(\sqrt{\frac{\log\log n}{n}}\right) \qquad \text{a.s.}$$

证明 由于

$$\hat{\sigma}^2-\sigma^2=\frac{1}{n}\sum_{t=1}^{n}(\varepsilon_t^2-\sigma^2)-(\hat{a}_1-a_1)\sum_{t=1}^{n}X_{t-1}^{+}\varepsilon_t-(\hat{a}_2-a_2)\sum_{t=1}^{n}X_{t-1}^{-}\varepsilon_t$$

而由定理2的结果知，

$$(\hat{a}_1-a_1)\cdot\frac{1}{n}\sum_{t=1}^{n}X_{t-1}^{+}\varepsilon_t=O\left(\sqrt{\frac{\log\log n}{n}}\right) \qquad \text{a.s.}$$

$$(\hat{a}_2-a_2)\cdot\frac{1}{n}\sum_{t=1}^{n}X_{t-1}^{-}\varepsilon_t=O\left(\sqrt{\frac{\log\log n}{n}}\right) \qquad \text{a.s.}$$

由$\{\varepsilon_t\}$i.i.d.知，$\{\varepsilon_t^2-\sigma^2\}$也是i.i.d.，由假设及引理1得：

$$\frac{1}{n}\sum_{t=1}^{n}(\varepsilon_t^2-\sigma^2)=O\left(\sqrt{\frac{\log\log n}{n}}\right) \qquad \text{a.s.}$$

从而

$$\hat{\sigma}^2-\sigma^2=O\left(\sqrt{\frac{\log\log n}{n}}\right) \qquad \text{a.s.}$$

2 多维多阶多个门限的自回归模型

考虑K维门限自回归模型

$$Z_t=\sum_{j=1}^{p}A_j^{(i)}Z_{t-j}+\varepsilon_t^{(i)}, \quad \text{当 } Z_{t-d}\in R_i^k, \tag{3}$$

$i=1,2,\cdots,l$，　$t=1,2,\cdots$，其中$\{R_i^k, i=1,2,\cdots,l\}$是$k$维欧氏空间$R^k$的一个剖分，参数$p$，$d$，$l$均假定为已知，系数矩阵$A_j^{(i)}=(a_j^{(i)}(m,n))$. $Z_t=(Z_t(s))_{1\times k}$，$\varepsilon_t^{(i)}=(\varepsilon_t^{(i)}(s))_{1\times k}$对于$k$维白噪声序列$\{\varepsilon_t^{(i)}\}$，假定同〔3〕.

在〔3〕中，我们讨论了模型(3)的参数估计的强相容性，得到了以下结果：

在条件

$$\sum_{j=1}^{p}\|A_j^{(i)}\|<1, \quad i=1,2,\cdots,l, \tag{4}$$

$$\|A_j^{(i)}\|=\max_{1\le n\le k}\sum_{m=1}^{k}|a_j^{(i)}(m,n)|$$

下，系数矩阵及白噪声协方差阵的强相容估计为

$$\hat{A}=A+\left(\frac{1}{n}E_nX_n'\right)\left(\frac{1}{n}X_nX_n'\right)^{-1}$$

(C)1994-2019 China Academic Journal Electronic Publishing House. All rights reserved. http://www.cnki.net

$$\hat{G}=\frac{1}{n}EnE_n'-\left(\frac{1}{n}E_nX_n'\right)\left(\frac{1}{n}X_nX_n'\right)'\left(\frac{1}{n}EnX_n'\right)'$$

其中 En，Xn 同〔4〕.

下面给出 $\hat{A}$，$\hat{G}$ 的强收敛速度.

定理 4　在条件（4）下，若存在常数 c，使得 $E\left(Z_t(S)\right)^2<c$，$S=1,2,\cdots,k$，$t\geqslant 1$，则

$$\hat{A}-A=o\left(n^{-\frac{1}{2}}(\log n)^{\frac{1}{p}}(\log\log n)^{\frac{1+\delta}{p}}\right)\quad \text{a.s.}$$

其中 $1<p<2$，$\delta>0$.

证明　因为

$$\hat{A}-A=\left(\frac{1}{n}EnX_n'\right)\left(\frac{1}{n}X_nX_n'\right)^{-1}$$

但是[4]，

$$\frac{1}{n}(X_nX_n')\to H>0,\quad \text{a.s.}$$

故只须讨论 $\frac{1}{n}E_nX_n'$ 的收敛速度，而

$$\frac{1}{n}E_nX_n'=\sum_{i=1}^{l}\left(\frac{1}{n}\sum_{t=1}^{n}\varepsilon_t^{(i)}(r)Z_{t-j}(S)\chi\{Z_{t-d}\in R_i^k\}_{k\times(kpl)}\right.$$

对固定的 i，j（$1\leqslant i\leqslant l$，$1\leqslant j\leqslant p$），令

$$x_t=\varepsilon_t^{(i)}(r)\,Z_{t-j}(S)\,\chi\,\{Z_{t-d}\in R_i^k\}$$

易知 $\{x_t\}$ 为一鞅差序列，类似于定理 1 的证明可以得到，当 $1<p<2$ 时，

$$E\left|\sum_{t=1}^{n}X_t\right|^p<c\cdot n^{\frac{p}{2}}$$

由定理 1 的证明过程知，此时有

$$\frac{1}{n}\sum_{t=1}^{n}X_t=o\left(n^{-\frac{1}{2}}(\log n)^{\frac{1}{p}}(\log\log n)^{(1+\delta)/p}\right)\quad \text{a.s.}$$

从而

$$\hat{A}-A=o\left(n^{-\frac{1}{2}}(\log n)^{\frac{1}{p}}(\log\log n)^{\frac{1+\delta}{p}}\right)\quad \text{a.s.}$$

类似地可得到

定理 5　若 $E\left(\varepsilon_t^{(i)}\varepsilon_t^{(i)'}\odot\varepsilon_t^{(i)}\varepsilon_t^{(i)'}\right)=D$，$D$ 为一常数矩阵，则

$$\hat{G}-G=o\left(n^{-\frac{1}{2}}(\log n)^{\frac{1}{p}}(\log\log n)^{\frac{1+\delta}{p}}\right)\quad \text{a.s.}$$

其中 $1<p<2$，$\delta>0$.

(C)1994-2019 China Academic Journal Electronic Publishing House. All rights reserved.　http://www.cnki.net

参 考 文 献

1 Petruccelli J D, Woolford S W. A Threshold AR (1) Model. J Appl prob. 1984, 21: 270~286
2 Stout W F. Almost Sure Convergence. London: Academic, 1974
3 宋心远，邓集贤. 中山大学学报（自然科学版），1990，29（1）；23~28
4 范文宁，邓集贤. 应用概率统计，1986，2（3）：259~266

Strong Convergence Rate of Estimates of Parameters for TAR Models

Song Xinyuan * *Deng Jixian*

Abstract For Threshold Autoregressive (TAR) Model in which the order, the Threshold and the delay parameters are given, we obtain the strong convergence rate of the estimates of the parameters after the strong consistency of the estimates of the parameters were discussed.

Keywords threshold autoregressive, strong consistency, strong convergence rate

* Department of Mathematics, Zhongshan University, Guangzhou 510275

(C)1994-2019 China Academic Journal Electronic Publishing House. All rights reserved. http://www.cnki.net