中山大学学报（自然科学版）
第32卷 第2期 1993年
ACTA SCIENTIARUM NATURALIUM UNIVERSITATIS SUNYATSENI
Vol.32 №.2 1993

关于二次型的若干结果*

张振峰（中山大学计算机科学系）
滕成业（中山大学经济学系）

摘　要　给出了椭球等高分布下非中心二次型的特征根联合分布、最大特征根分布、迹的分布及中心二次型分布，推广了正态情况下的有关结果。

关键词　椭球等高分布族，二次型

二次型理论在最小二乘、方差分量分析、MINQUE 理论、假设检验和时间序列分析中的某些问题等起着重要作用。多年来，二次型理论正在不断丰富和深入；在正态分布假设下，khatri(1966)给出了中心二次型分布[1]，khatri(1977)及Crowther(1975)分别给出了非中心二次型分布[2,3]；同样是在正态分布假设下，Hayakawa 相继给出了非中心二次型特征根的联合分布、最大特征根及迹的分布[4]。由于正态分布是椭球等高分布族的特例，正态分布的许多特点在椭球等高分布族中都有反映，因此人们自然希望知道椭球等高分布假设下的二次型理论。本文的内容就涉及椭球等高分布假设下二次型本身的分布及其特征根分布的问题。

本文中的"～"表示"服从……的分布"，例如，$Z\sim LEC_{n\times m}(M,\Sigma,g)$，表示Z服从椭球等高分布，密度为 $\det\Sigma^{-n/2}g[\mathrm{tr}(Z-M)\Sigma^{-1}(Z-M)']$，其中 $\Sigma>o$，g 为某一适当的函数，M和Z 均为 $n\times m$ 阵。文内其余符号请参见 Muirhead(1981)[5] 及Davis (1979)[6]文的有关部分。

1　二次型中心分布

定理 1　设$Z_{n\times m}$为一随机阵，其密度为

$$\mathrm{pdf}(Z)=\det\Sigma^{-n/2}\det B^{-m/2}g(\mathrm{tr}\Sigma^{-1}Z'B^{-1}Z)$$

其中，$\Sigma_{m\times m}o>$，$B_{n\times n}>o$，$g(\cdot)$为某一适当的函数且在$(-\infty,+\infty)$上可以Taylor 展开，A为一$n\times n$正定阵，$n\geqslant m$，则$Q=Z'AZ$的密度为：

$$\mathrm{pdf}(Q)=\left[\Gamma_m\left(\frac{n}{2}\right)\right]^{-1}\pi^{mn/2}\det\Sigma^{-n/2}\det(AB)^{-m/2}\det Q^{(n-m-1)/2}$$

$$\times\sum_{k=0}^{\infty}\frac{g^{(k)}(0)}{k!}\sum_{\kappa}\frac{C_\kappa(B^{-1}A^{-1})C_\kappa(\Sigma^{-1}Q)}{C_\kappa(I_n)}$$

本文1992年4月20日收到
*国家自然科学基金基助项目

其中κ为k的不超过m个部分的划分。

证明 易知$X=A^{1/2}Z$的密度为:

$$\mathrm{pdf}(X)=\det\Sigma^{-n/2}\det(AB)^{-m/2}g(\mathrm{tr}\Sigma^{-1}X'A^{-1/2}B^{-1}A^{-1/2}X)(dX)$$

$$=\det\Sigma^{-n/2}\det(AB)^{-m/2}$$

$$\times\sum_{k=0}^{\infty}\frac{g^{(k)}(0)}{k!}\left[\mathrm{tr}(\Sigma^{-1}X'A^{-1/2}B^{-1}A^{-1/2}X)\right]^k(dX)$$

作变换$X=H_1D, H_1\epsilon V_{m,n}$, D为具正对角元的上三角阵,则 $Q=D'D=X'X=Z'AZ$ 且

$$(dX)=2^{-m}\det Q^{(n-m-1)/2}(dQ)(H'_1dH_1)$$

因此

$$\mathrm{pdf}(Q)=2^{-m}\det\Sigma^{-n/2}\det(AB)^{-m/2}\det Q^{(n-m-1)/2}$$

$$\times\sum_{k=0}^{\infty}\frac{g^{(k)}(0)}{k!}\sum_{\kappa}\int_{V_{m,n}}C_\kappa(\Sigma^{-1}D'H'_1A^{-1/2}B^{-1}A^{-1/2}H_1D)\ (H'_1dH_1)$$

$$=\frac{\pi^{mn/2}}{\Gamma_m\left(\frac{n}{2}\right)}\det\Sigma^{-n/2}\det(AB)^{-m/2}\det Q^{(n-m-1)/2}$$

$$\times\sum_{k=0}^{\infty}\frac{g^{(K)}(0)}{k!}\sum_{\kappa}\frac{C_\kappa(A^{-1}C^{-1})B_\kappa(\Sigma^{-1}Q)}{C_\kappa(I_n)}$$

此处用到Muirhead[5] (1982)引理9.5.3及Davis(1979)[6]式子(1.2)。

2 非中心二次型的特征根分布

定理 2 设$Z\sim LEC_{n\times m}(M,I_m; g)n\geqslant m$。$A$为$n\times n$正定阵,$Q=Z'AZ$,$l_1>\cdots>l_m>0$为$Q$的特征根,$\Lambda=\mathrm{diag}(l_1,\cdots,l_m)$则 $l_1\cdots l_m$的联合分布为:

$$\mathrm{pdf}(l_1\cdots l_m)=C\cdot\det\Lambda^{(m-n-1)/2}\det A^{-m/2}\prod_{i>j}(l_j-l_i)$$

$$\times\sum_{k,l=0}^{\infty}\frac{g^{(k+2l)}(\mathrm{tr}\Omega)}{k!\,l!}\times\sum_{\kappa,\lambda}\sum_{\phi\in\kappa\cdot\lambda}\frac{\theta_\phi^{\kappa\lambda}C_\phi(\Lambda)C_\phi^{\kappa\lambda}(A^{-1},A^{-1}\Omega)}{\left(\frac{m}{2}\right)_\lambda C_\phi(I_n)}$$

其中κ、λ分别为k、l的不超过n个部分的划分,$C=2^m\pi^{m(m+n)/2}\left[\Gamma_n\left(\frac{n}{2}\right)\Gamma_m\left(\frac{m}{2}\right)\right]^{-1}$

$\Omega=MM'$,$\theta_\phi^{\kappa,\lambda}=C_\phi^{\kappa,\lambda}(I_n,I_n)/C_\phi(I_n)$

证明 易知$Y=A^{1/2}Z$的密度为:

$$\mathrm{pdf}(Y)=\det A^{-m/2}g[\mathrm{tr}A^{-1}(Y-M^*)(Y-M^*)']$$

其中 $M^*=A^{1/2}M$。作变换$Y=L_1\Lambda^{1/2}H$。$L_1\epsilon V_{m,n}$,
$H\epsilon O(m)$、由Hayakawa知

$$(dY)=\frac{\pi^{n^2/2}}{\Gamma_m\left(\frac{m}{2}\right)}\det\Lambda^{(n-m-1)/2}\prod_{i>j}(l_i-l_j)\bigwedge_{i=1}^{m}dl_i(dH)\ (L'_1dL_1)$$

因此

$$\mathrm{pdf}(l_1,\cdots,l_m)=\frac{\pi^{n^2/2}}{\Gamma_m\left(\frac{m}{2}\right)}\det A^{(n-m-1)/2}\prod_{i<j}(l_i-l_j)\det A^{-m/2}$$

$$\times\int_{L_1\epsilon V_{m,n}}\int_{H\epsilon 0(m)}g[\mathrm{tr}A^{-1}(L_1AH-M^*)(L_1AH-M^*)']\times(L'_1dL_1)(dH)$$

$$=\left[\pi^{m^2/2}/\Gamma_m\left(\frac{m}{2}\right)\right]\det A^{(n-m-1)/2}\det A^{-m/2}\prod_{i<j}(l_i-l_j)$$

$$\times\sum_{k,l=0}^{\infty}\frac{g^{(k+l)}(\mathrm{tr}\Omega)}{k!l!}\int_{L_1\epsilon V_{m,n}}\int_{H\epsilon 0(m)}(\mathrm{tr}A^{-1}L_1AL'_1)^k$$

$$\times(-2\mathrm{tr}A^{-1}L_1A^{1/2}HM^{*\prime})^l\ (L'_1dL)(dH)$$

$$=\ C\times\det A^{(n-m-1)/2}\det A^{-m/2}\prod_{i<j}(l_i-l_j)$$

$$\times\sum_{k,l=0}^{\infty}\frac{g^{(k+l)}(\mathrm{tr}\Omega)}{k_k!l!}\int_{L\epsilon 0(n)}\int_{H\epsilon 0(m)}[\mathrm{tr}(A^{-1}LTT'L')]^k$$

$$\times[-2\mathrm{tr}(A^{-1}LTHM^{*\prime})]^l\ (dL)(dH)\tag{1}$$

其中，$T_{n\times m}=(A^{1/2},0)'$，最后一个等式的证明运用了Muirhead(1982)[5]引理9.5.3. 由James(1964)[7]式(22)及Davis(1979)[6]式(1.2)可知

$$\int_{L\epsilon 0(n)}\int_{H\epsilon 0(n)}[\mathrm{tr}(U'L'PLU)]^k[-2\mathrm{tr}(HRLU)]^j(dL)(dH)$$

$$=\begin{cases}\displaystyle\sum_{\kappa,\lambda}\sum_{\phi\epsilon\kappa\cdot\lambda}\frac{\theta_\phi^{\kappa\lambda}C_\phi(UU')\,C_\phi^{\kappa\lambda}(P,R'R)}{\left(\frac{m}{2}\right)_\lambda C_\phi(I_n)}\cdot 2^l\cdot(2l-1)!! & j=2l+1\\ 0 & j=2l+1\end{cases}\tag{2}$$

由式(1)、(2)即可求得$l_1\cdots l_m$的联合密度.

定理3　设$Z\sim LEC_{n\times m}(M,I;g)$，$n\geqslant m$，$g(\cdot)$在$(-\infty,+\infty)$上可以Taylor展开，$A$为$-n\times n$正定阵，$Q=Z'AZ$，则$Q$的最大特征根的密度为：

$$\mathrm{pdf}(l_1)=\frac{2^m\pi^{mn/2}\Gamma_m\left(\frac{m+1}{2}\right)}{\Gamma_m\left(\frac{n+m+1}{2}\right)}\det A^{-m/2}$$

$$\times\sum_{k,l=0}^{\infty}\frac{g^{(k+2l)}(\mathrm{tr}\Omega)}{k!\,l!}\left(\frac{mn}{2}+k+l\right)l_1^{(mn/2)+k+l-1}$$

$$\times\sum_{\kappa,\lambda}\sum_{\phi\epsilon\kappa,\lambda}\frac{\theta_\phi^{\kappa\lambda}C_\phi^{\kappa\lambda}(A^{-1},A^{-1}\Omega)\left(\frac{n}{2}\right)_\phi}{\left(\frac{n+m+1}{2}\right)_\phi\left(\frac{m}{2}\right)_\lambda}\cdot\frac{C_\phi(I_n)}{C_\phi(I_n)}$$

其中κ,λ分别为k,l的划分.

证明　定理2已给出了Q的特征根$l_1>\cdots>l_m>0$的联合密度，作变换

$$l_1 = l_1$$
$$l_i = w_i l_1, \quad i = 2, \cdots, m$$

则由定理 2

$$\mathrm{pdf}(l_1) = C \cdot \det A^{-m/2} \cdot \sum_{k,l=0}^{\infty} \frac{g^{(k+2l)}(\mathrm{tr}\Omega)}{k!l!}$$

$$\times \sum_{\kappa,\lambda} \sum_{\phi \in \kappa \cdot \lambda} \frac{\theta_{\phi}^{\kappa\lambda} C_{\phi}^{\kappa\lambda}(A^{-1}, A^{-1}\Omega)}{\left(\frac{m}{2}\right)_{\lambda} C_{\phi}(I_n)} l_1^{(mn/2)+k+l-1}$$

$$\times \int_{1>W_2>\cdots W_m>0} \det D^{(n-m-1)/2} \prod_{i<j}(w_i - w_j) \prod_{i=2}^{m}(1-w_i) C_{\phi}(D)$$

$$\times \bigwedge_{i=2}^{m} dw_i$$

其中$D = \mathrm{diag}(1, w_2, \cdots w_m)$，再由Hayakawa(1969)[4]式(22)即得上式中积部分为

$$\frac{\Gamma_m\left(\frac{n}{2}\right)\Gamma_m\left(\frac{m+1}{2}\right)}{\Gamma_m\left(\frac{n+m+1}{2}\right)} \cdot \frac{\Gamma_m\left(\frac{m}{2}\right)}{\pi m^2/2}\left(\frac{mn}{2} + k + l\right) \cdot \frac{\left(\frac{n}{2}\right)_{\phi}}{\left(\frac{n+m+1}{2}\right)_{\phi}} C_{\phi}(I_m)$$

由此可得结论。

利用定理2给出的特征根联合分布可以得到椭球等高分布 $LEC_{n\times m}(M, I_m; g)$假设下的二次型迹的分布，但是利用(2)式的一个特殊情况($m=1$)将得到更深刻的结果。

定理 4 设Z为一$n\times m$随机阵，其密度为

$\mathrm{pdf}(Z) = \det\Sigma^{-n/2}\det B^{-m/2} g(\mathrm{tr}\Sigma^{-1}(Z-M)'B^{-1}(Z-M))$ 其中Σ与B分别为$m\times m$与$n\times n$正定阵，$g(\cdot)$为某一适当函数、且在$(-\infty, +\infty)$上可以TayLor展开，A为一$n\times n$正定阵。$Q = Z'AZ$，则$T = \mathrm{tr}(Z'AZ)$的密度为：

$$\mathrm{pdf}(T) = \Pi^{mn/2}\left[\Gamma\left(\frac{mn}{2}\right)\right]^{-1} \det\Sigma^{-n/2}\det(AB)^{-m/2}$$

$$\times \sum_{k,l=0}^{\infty} \frac{g^{(k+2l)}(\mathrm{tr}\Omega)}{k!l!} \times T^{(mn/2)+k+l-1}$$

$$\times \sum_{\phi \in [k]\cdot[l]} \frac{\theta_{\phi}^{[k],[l]}}{C_{\phi}(I_{mn})\left(\frac{1}{2}\right)} C_{\phi}^{[k],[l]}[\Sigma^{-1}\otimes A^{-1}B^{-1},$$

$$(\Sigma^{-2}\otimes B^{-1}A^{-1}B^{-1})\mu\mu']$$

其中 $\Omega = M'B^{-1}M\Sigma^{-1}$。

证明略。

参 考 文 献

1 Khatri C G. Annals of Mathematical Statistics,1966, 37:468～479

2 khatri C G. South African Statistitical Journal, 1977, 11:167～179

3 Crowther N A S.South African Statistical Journal, 1975 (2):27～36

4 Hayakawa Trkesi Annals of the Institute of Statistical Mathematics, 1969, 24: 205～230

5 Muirhead R J.Aspects of multivariate Statistical analysis. John Wiley & Sons,Inc.1982

6 Davis A W.Annals of the Institute of Statistical Mathematics, 1979, Part A, 31: 465～485

7 James A T.Annals of Mathematical Statistics, 1964, 35:475～501

Some Results on Quadratic Form

Zhang Zhenfeng Teng Chengye*

Abstract We give the joint distribution of the latent roots,the distributions of the largest latent root and the trace of the noncentral quadratic form (Z'AZ) and the distribution of the central quadratic form (X'AX), where A is a positive define matrix and Z and X have elliptically contoured ditribution, thus generalizing the relevent results of Khatri[5] and Hayakawa [2].

Keywords elliptically contoured distribution, quadratic form

* Department of Computer Science, Zhongshan University