第30卷 第4期 1991年
中山大学学报（自然科学版）
ACTA SCIENTIARUM NATURALIUM UNIVERSITATIS SUNYATSENI
Vol.30 №.4 1991

·研究简报·

一阶微分从属

朱玉灿 林和曾
（数学系）

摘 要

本文给出函数g从属于函数f的充要条件和g不从属于f的必要条件，并利用这些结果确定一类一阶微分从属的最佳控制。

关键词 从属，微分从属的最佳控制

Miller等讨论过微分从属的最佳控制问题，采用的从属定义要求被从属的函数是单叶的，因而需要较强的条件。本文去掉了单叶性的要求，研究某些一阶微分从属的最佳控制，得到了相当一般的结果。

设f和F在$U=\{z:|z|<1\}$内解析，如果存在U内解析的函数w，满足$|w(z)|\leqslant|z|(z\in U)$，使得$f(z)=F(w(z))(z\in U)$，则称$f$从属于$F$，记$f\prec F$或$f(z)\prec F(z)$。设$\Omega$为$\mathbf{C}\times\mathbf{C}$上的区域，$\phi:\Omega\to\mathbf{C}$解析，$h,p$在$U$内解析，又当$z\in U$时，$(p(z),zp'(z))\in\Omega$，且满足微分从属

$$\phi(p(z),zp'(z))\prec h(z) \tag{1}$$

如果有U内解析函数q，使对满足（1）的每个解析函数p，都有$p\prec q$，则称q为微分从属（1）的控制。如果$\tilde{q}$为（1）的控制，且对（1）的任一个控制q都有$\tilde{q}\prec q$，则称$\tilde{q}$为微分从属（1）的最佳控制。

引理1[1] 设X和Y为Hausdorff空间，$\Pi: X\to Y$为局部同胚，又设Z为连通的拓扑空间，$f: Z\to X$为连续映照。如果$g_1, g_2: Z\to Y$为f的两个提升，且存在$z_0\in Z$使$g_1(z_0)=g_2(z_0)$，则$g_1=g_2$。

引理2[1] 设S，S_1和$\tilde{S}$均为Riemann曲面，p: $\tilde{S}\to S$为没有分支的全纯映照，f: $S_1\to S$为全纯映照，则f的每个提升g: $S_1\to\tilde{S}$都为全纯映照。

引理3[2] 设$w(z)=a_nz^n+a_{n+1}z^{n+1}+\cdots$为$U$内解析且$w\neq0$和$n\geqslant1$，如果存在$z_0=r_0e^{i\theta_0}(0<r_0<1)$使$|w(z_0)|=\max\limits_{|z|<r_0}|w(z)|$，则存在实数$m\geqslant n$，使

i) $z_0w'(z_0)=mw(z_0)$； ii) $\mathrm{Re}\left\{\frac{z_0w''(z_0)}{w'(z_0)}+1\right\}\geqslant m$.

引理4 设E为线性拓扑空间X中的凸集，如果$y_0\in E$，$x_0\in\mathrm{int}(E)$，则$y=\alpha x_0+$

本文1989年10月11日收到

$(1-\alpha)y_0\in\mathrm{int}(E)$，其中$0<\alpha<1$。

特别地，如果G为复平面$\mathbf{C}$上的凸区域，且$z_0\in G$，$z_1\in\bar{G}$，则$z=z_0t+(1-t)z_1\in G$，其中$0<t<1$。

证明从略，可参阅文〔3〕。

引理5　设f，g在U内解析，且$f(0)=g(0)$，$g(z)\neq g(0)$，$f'(z)\neq 0(z\in U)$，如果对任何$z\in U$，存在曲线γ_z:〔0,1〕→U满足：

$$\gamma_z(0)=0,\ g(tz)=f(\gamma_z(t)),\ 0\leqslant t\leqslant 1,$$

则$w(z)=\gamma_z(1)$在U内连续。

证明　由所设条件可知：存在$\varepsilon>0$，若记$B_\varepsilon(0)=\{z:|z|<\varepsilon\}$，$V=f(B_\varepsilon(0))$，则有$w(z)=f^{-1}|_V(g(z))$。

如果w在U内不连续，便存在$R\in(0,1)$，使w在$|z|<R$内连续，而在$|z|\leqslant R$上不连续。但是，这时可利用引理1，引理2和解析函数的唯一性定理证明w在$|z|\leqslant R$上解析，从而引理5成立。详细情形这里省略。

定理1　设f，g在U内解析，且$f'(z)\neq 0$ $(z\in U)$，$f(0)=g(0)$，则$g\prec f$的充要条件为对任何$z\in U$都存在一条曲线γ_z:〔0,1〕→U满足

$$\gamma_z(0)=0,\ g(tz)=f(\gamma_z(t)),\ 0\leqslant t\leqslant 1.$$

定理2　设f，g在U内解析，且$f(0)=g(0)=a$，

$$g(z)=a+a_nz^n+a_{n+1}z^{n+1}+\cdots,\ z\in U$$

f在$\bar{U}$上解析，$f'(z)\neq 0$，$z\in U$。如果g不从属于f，则存在$z_0\neq 0$，$z_0\in U$，$|\zeta_0|=1$和实数$m\geqslant n\geqslant 1$，使

i) $g(Dr_0)\subset f(U)$，其中$r_0=|z_0|$，$Dr_0=\{z:|z|<r_0\}$，

ii) $g(z_0)=f(\zeta_0)$，

iii) $z_0g'(z_0)=m\zeta_0f'(\zeta_0)$，

iv) $\mathrm{Re}\left[1+\dfrac{z_0g''(z_0)}{g'(z_0)}\right]\geqslant m\,\mathrm{Re}\left[1+\dfrac{\zeta_0f''(\zeta_0)}{f'(\zeta_0)}\right]$.

证明　如果$g\not\prec f$（不从属），则$g\not\equiv a$。令

$$A=\{r\in[0,1]:\ \text{存在}\ |z_1|<r\ \text{而不存在曲线}\ \gamma_{z_1}:[0,1]\to U\ \text{使}\ \gamma_{z_1}(0)=0,\ g(tz_1)=f(\gamma_{z_1}(t)),\ 0\leqslant t\leqslant 1\}.$$

由引理5知，集合A非空。记

$$r_0=\inf\{r,r\in A\}$$

则$0<r_0<1$，且对于每个$z\in Dr_0$，都有曲线γ_z:〔0,1〕→U使

$$\gamma_z(0)=0,\ g(tz)=f(\gamma_z(t)),\ 0\leqslant t\leqslant 1.$$

其中$Dr_0=\{z:|z|<r_0\}$，于是$g(Dr_0)\subset f(U)$，定义

$$w(z)=\gamma_z(1),\ z\in Dr_0$$

不难证明：w在Dr_0内解析，且

$$w(z)=c_nz^n+c_{n+1}z^{n+1}+\cdots,\ z\in D_{r_0}$$

$$g(z)=f(w(z)),\ z\in D_{r_0}$$

及$w\not\equiv 0$。

1）若存在$\xi_0\in\partial Dr_0$使$g(\xi_0)\in\partial f(U)$，其中∂G表示区域G的边界。则对于$t=1,2,\cdots$

$$g\left(\frac{t}{1+t}\xi_0\right)=f\left(w\left(\frac{t}{1+t}\xi_0\right)\right)$$

记$w_t=w\left(\frac{t}{1+t}\xi_0\right)$，则存在子列$\{w_{tk}\}_{k=1}^{\infty}$，使　$w_{tk}\to w_0$，$k\to\infty$，且$|w_0|\leqslant 1$于是$g(\xi_0)=f(w_0)\in\partial f(U)$，从而$|w_0|=1$。令

$$|w(z_t)|=\max_{|z|\leqslant[tr_0/(1+t)]}|w(z)|,\quad t=1,2,\cdots$$

由解析函数的最大模原理，得$|z_t|=\frac{t}{1+t}r_0$，$t=1,2,\cdots$且

$$\left|w\left(\frac{t}{1+t}\xi_0\right)\right|\leqslant|w(z_t)|\leqslant 1,\quad t=1,2,\cdots$$

于是存在子列$\{z_{tk}\}_{k=1}^{\infty}$，使当$k\to\infty$时　$z_{tk}\to z_0$，$w(z_{tk})\to\zeta_0$ 且$|z_0|=r_0$，$|\zeta_0|=1$。由引理3知：存在实数$m_{tk}\geqslant n$使

$$g(z_{tk})=f(w(z_{tk}))，\quad z_{tk}g'(z_{tk})=m_{tk}w(z_{tk})f'(w(z_{tk}))\tag{2}$$

$$\operatorname{Re}\left[1+\frac{z_{tk}g''(z_{tk})}{g'(z_{tk})}\right]\geqslant m_{tk}\operatorname{Re}\left[\frac{w(z_{tk})f''(w(z_{tk}))}{f'(w(z_{tk}))}+1\right]\tag{3}$$

由于当$k\to\infty$时，$w(z_{tk})f'(w(z_{tk}))\to\zeta_0f'(\zeta_0)$和

$$z_0g'(z_0)=\lim_{k\to\infty}[m_{tk}w(z_{tk})f'(w(z_{tk}))]$$

知：$\lim\limits_{k\to\infty}m_{tk}=m$存在，且$m\geqslant n$，故此在式（2）和（3）中，令$k\to\infty$，就得到定理2。

2）若$g(\partial D_{r0})\subset f(U)$，则存在$\varepsilon_0>0$，使$g(D_{r0+\varepsilon0})\subset f(U)$，记

$$R=\sup_{|z|<r_0}|w(z)|$$

如果$R<1$，对固定$|\xi|=r_0$，存在数列$\left\{w\left(\frac{S_k}{S_k+1}\xi\right)\right\}_{k=1}^{\infty}$使

$$w\left(\frac{S_k}{S_k+1}\xi\right)\to w,\quad k\to\infty$$

其中$|w|\leqslant R$，$\{S_k\}_{k=1}^{\infty}$为正整数序列，且$g(\xi)=f(w)$。由于$f'(w)\neq 0$和f在U内解析知：存在 $\delta>0$ 使$B_\delta(w)=\{z:|z-w|<\delta\}\subset U$，且$f$将$B_\delta(w)$单叶地映为$V=f(B_\delta(w))$。又由于$g$在$z=\xi$点解析，于是存在$\varepsilon_1>0$，使 $g(B_{\varepsilon1}(\xi))\subset V$，且 $\varepsilon_1<\varepsilon_0$，从而存在$k_0$使$w\left(\frac{S_{k0}}{S_{k0}+1}\xi\right)\in B_\delta(w)$，$z_1=\frac{S_{k0}}{S_{k0}+1}\xi\in B_{\varepsilon1}(\xi)$。由于$B_{\varepsilon1}(\xi)$为凸集，记$r_1=\frac{S_{k0}}{S_{k0}+1}$，且

$$\gamma_\xi(t)=\begin{cases}w\left(\frac{z_1}{r_1}t\right), & \text{当}0\leqslant t\leqslant r_1,\\ f^{-1}\Big|_V\left(g\left(z_1\left(1-\frac{t-r_1}{1-r_1}\right)+\frac{t-r_1}{1-r_1}\xi\right)\right), & \text{当}r_1\leqslant t\leqslant 1,\end{cases}$$

则γ_ξ 为一条曲线，且

$$\gamma_\xi(0)=0,\quad g(t\xi)=f(\gamma_\xi(t)),\quad 0\leqslant t\leqslant 1$$

设$R_1\varepsilon(r_1,1)$，则

$$g(t\xi)=f(w(t\xi)=f(\gamma_{\xi}(t)),\quad r_1\leqslant t\leqslant R_1$$

且$\gamma_\xi(r_1)=w(r_1\xi)$，由引理1知：

$$w(z)=f^{-1}\Big|_V(g(z)),\ \text{当}\arg z=\arg\xi,\ \zeta_0 r_1\leqslant|z|\leqslant r_0R_1$$

由解析函数的唯一性定理，知

$$w(z)=f^{-1}|_V(g(z)),\quad z\epsilon B_{\varepsilon 1}(\xi)\cap Dr_0$$

可以证明w在$|z|\leqslant r_0$上解析，从而存在$R_2>r_0$使w在$|z|<R_2$上解析，这与R的定义矛盾。故此$R=1$。取数列$\{r_s\}_{s=1}^{\infty}$满足

$$0<r_s<r_0,\ s=1,2,\cdots,\ \text{且}\lim_{s\to\infty}r_s=r_0$$

记$\{z_s\}_{s=1}^{\infty}$在Dr_0内，使$|w(z_s)|=\max\limits_{|z|\leqslant r_s}|w(z)|,s=1,2,\cdots$，则当$s\to\infty$时，$|w(z_s)|\to1$，

于是存在子列$\{z_{sk}\}_{k=1}^{\infty}$使

$$z_{sk}\to z_0,\ w(z_{sk})\to\zeta_0\quad \text{当}k\to\infty$$

且$|z_0|=r_0$，$|\zeta_0|=1$，与1）一样讨论，可证得定理2。

注1　当f在U内单叶时，得到〔4〕中的引理1。定理2在确定一些一阶微分从属的最佳控制时，可避免要求微分方程有单叶解析解的麻烦。

定理3　设h在U内解析，ϕ在区域$D\supset h(U)$内解析，且$\mathrm{Re}\phi(h(z))>0(z\epsilon U)$。如果$h$为凸的，且微分方程

$$q(z)+zq'(z)\phi(q(z))=h(z),\ q(0)=h(0)\tag{4}$$

在U内有解析解q，p在U内解析，$p(U)\subset D$，$p(0)=h(0)$且

$$p(z)+zp'(z)\phi(p(z))\prec h(z)\tag{5}$$

则$p\prec q\prec h$，且q为微分从属（5）的最佳控制。

注2　定理3给出了求微分从属（5）的最佳控制的方法，此处q在U内不一定单叶。由定理2和Schwarz引理知：若方程（4）在U内有解析解q，则解必是唯一的。

定理4　设β，$\gamma\epsilon C$，且$\beta\neq0$。如果h为凸的，h，g在U内解析，$\mathrm{Re}[\beta h(z)+\gamma]>0$，$z\epsilon U$，且$g\prec h$，则微分方程

$$p(z)+\frac{zp'(z)}{\beta p(z)+\gamma}=g(z),\ p(0)=g(0)\tag{6}$$

在U内有解析解p，且满足$p\prec q\prec h$，其中q为微分方程

$$q(z)+\frac{zq'(z)}{\beta q(z)+\gamma}=h(z),\ q(0)=h(0)\tag{7}$$

的解析解。

注3　从定理4可得〔5〕中的定理2和〔6〕中的定理3，但这里q不一定为单叶，在讨论积分算子时，有很大的方便。

推论1　设$\beta>0$，$\gamma\epsilon C$，$\rho<1,0<a\leqslant1$，且$\mathrm{Re}\gamma+\beta\rho\geqslant0$，如果$g$在$U$内解析，且$g(z)\prec\rho+(1-\rho)\left(\frac{1+z}{1-z}\right)^a$。则微分方程

$$p(z)+\frac{zp'(z)}{\beta p(z)+\gamma}=g(z),\quad p(0)=1$$

在U内有解析解p，且满足

$$p(z)\prec q(z)\prec\rho+(1-\rho)\left(\frac{1+z}{1-z}\right)^{\alpha}$$

其中 $q(z)=\dfrac{z^{\gamma}H(z)^{\beta}}{\beta\int_{0}^{z}H(t)^{\beta}t^{\gamma-1}\mathrm{d}t}-\dfrac{\gamma}{\beta}$，$H(z)=z\exp\left\{\int_{0}^{z}\dfrac{(1-\rho)[(1+t)^{\alpha}-(1-t)^{\alpha}]}{t(1-t)^{\alpha}}\mathrm{d}t\right\}$。

注4 在推论2中，取$\alpha=1$，$\rho=0$得到[7]中的定理1；取$\alpha=1$，得到[8]中的定理1和定理2。

定理5 设h为U内解析且为凸的，θ,ϕ在区域D内解析，p在U内解析，且$p(U)\subset D$，$h(0)=\theta(p(0))$。如果微分方程

$$\theta(q(z))+zq'(z)\phi(q(z))=h(z)$$

在U内有解析解q，满足 $q(0)=p(0)$，$\theta(q(z))\prec h(z)$则从关系式

$$\theta(p(z))+zp'(z)\phi(p(z))\prec h(z)\tag{8}$$

推出$p\prec q$，且q为微分从属(8)的最佳控制。

参考文献

1 Forster O. Lectures on Riemann Surfaces, Translated by B. Gilligan, Springer—Verlag New York Inc. 1981: 20～31

2 Miller S S, Mocanu P T. J Math Anal Appl, 1978; 65: 289～305

3 Taylor A E, Lay D C. Introduction to Functional Analysis, John Wiley & Sons Inc. 1980

4 Miller S S, Mocanu P T. J Differential Equations, 1987: 67: 199～211

5 Eenigenburg P, Miller S S, Mocanu P T, Reade M O. Rev Roumaine Math Pures Appl. 1984; 29:567～573

6 Miller S S, Mocanu P T. J Differential Equations, 1985; 56: 297～309

7 Andreev V V, Miller S S. Доклады Болгарской Академии Наук, Томе 1984; 37: 437～439

8 马万仑. 数学学报, 1986; 29: 207～212

The First-order Differential Subordinations

*Zhu Yucan** *Lin Hezeng*

Abstract

Let $U=\{z:|z|<1\}$. Assume that the functions f and g are analytic in U, and $f'(z)\neq 0$ for all z in U. We give a necessary and sufficient condition for function g to be subordinate to f, and obtain some results when g is not subordinate to f. Using these results, we determine the best dominant of some first-order differential subordinations.

Keywords subordination, the best dominant of differential subordinations

* Department of Mathematics