

· 研究简报 ·

配乘矩阵特征值反问题可解的必要条件

黎 罗 罗

(计算机科学系)

摘 要 给出 n 阶半正定Hermite矩阵配乘特征值反问题可解的三组必要条件. 当 $n=2$ 时, 这些必要条件同时是该反问题可解的充分条件.

关键词 Hermite矩阵, 特征值, 反问题

1 问题及主要结果

设 $A = (a_{ij})$ 是 n 阶半正定Hermite 矩阵, $\lambda_1 \geq \lambda_2 \geq \dots \geq \lambda_n$ 是给定非负实数. 考虑配乘特征值反问题(MH): 求 n 阶非负对角矩阵 D , 使得矩阵 DA 具有特征值 $\lambda_1, \lambda_2, \dots, \lambda_n$.

注意当 D 为非负对角矩阵时, DA 与Hermite矩阵 $D^{1/2}AD^{1/2}$ 有完全相同的特征值. 另外, 研究问题(MH)时, 不失一般性可设 $a_{ii} = 1 (i = 1, 2, \dots, n)$. 事实上, 由 A 半正定知 $a_{ii} \geq 0$. 若所有 $a_{ii} > 0$, 令 $A' = (a_{ij}')$, $a_{ij}' = a_{ij} / \sqrt{a_{ii} a_{jj}}$, 原问题可转化为对矩阵 A' 考虑问题(MH), 而 $a_{ii}' = 1$; 若有某 $a_{i_0 i_0} = 0$, 则必有 $a_{i_0 j} = a_{j i_0} = 0 (j = 1, 2, \dots, n)$, 原问题可降阶研究, 直到新问题中的半正定矩阵具有全正对角元为止.

当 $n=2$ 时, 问题(MH)可解的充分必要条件见引理1. $n > 2$ 时, (MH)可解的充分条件见文[2]; 本文讨论(MH)可解的必要条件, 给出定理1—3.

引理1 ^[1~3] 设 $A = (a_{ij})$ 为2阶半正定Hermite矩阵, $a_{11} = a_{22} = 1, a_{12} = \bar{a}_{21} = a$, 则问题(MH)可解的充分必要条件是

$$(\lambda_1 - \lambda_2)^2 \geq |a|^2 (\lambda_1 + \lambda_2)^2 \quad (1)$$

或
$$\lambda_1 \lambda_2 \leq [(\lambda_1 + \lambda_2)/2]^2 (1 - |a|^2) \quad (2)$$

(注: 由 A 半正定知 $|a| \leq 1$).

下面用 $A^{(0)}$ 记矩阵 $A - \text{diag}(a_{11}, a_{22}, \dots, a_{nn})$, 用 $\|A\|_F$ 记 $(\sum_{i,j=1}^n |a_{ij}|^2)^{1/2}$, 用 $\lambda_i(A)$ 表示Hermite矩阵 A 的依降序排列的第 i 个特征值. 对于 $\{1, 2, \dots, n\}$ 中的 m 个数 $i_1 < i_2 < \dots < i_m$, 用 $A[i_1, i_2, \dots, i_m]$ 记 A 的位于第 i_1, i_2, \dots, i_m 行及第 i_1, i_2, \dots, i_m 列的 $m \times m$ 个元素按原来相对位置所成的主子矩阵.

定理1 设 $A = (a_{ij})$ 为 n 阶半正定Hermite矩阵, $a_{ii} = 1 (i = 1, 2, \dots, n)$; 又给定 $\lambda_1 \geq \lambda_2 \geq \dots \geq \lambda_n \geq 0$. 问题(MH)可解的必要条件是: 对 $m = 2, 3, \dots, n$ 成立

本文1990年5月14日收到

$$\sum_{1 \leq i < j \leq m} (\lambda_i - \lambda_{j+n-m})^2 \geq r_m \cdot \max_{1 \leq i_1 < i_2 < \dots < i_m \leq n} \{ \|A^{(0)}[i_1, i_2, \dots, i_m]\|_F^2 \} \quad (3)$$

其中, $r_m = m\lambda_n(\lambda_n + \lambda_{n-1})/2$ (当 $m > 2$ 时), $r_2 = (\lambda_n + \lambda_{n-1})^2/2$.

定理 2 条件同定理 1. 问题(MH)可解的必要条件是: 对 $m = 1, 2, \dots, n$ 及 $1 \leq i_1 < i_2 < \dots < i_m \leq n$ 有

$$\prod_{i=1}^m \lambda_{i_i} \leq [(\lambda_1 + \lambda_2 + \dots + \lambda_m)/m]^m \prod_{i=1}^m \lambda_{i_i} (A) \quad (4)$$

定理 3 条件同定理 1. 问题(MH)可解的必要条件是:

$$\sum_{1 \leq i < j \leq n} \lambda_i \lambda_j \leq \left(\frac{\lambda_1 + \lambda_2}{2} \right)^2 \left[\frac{n(n-1)}{2} - \frac{1}{2} \|A^{(0)}\|_F^2 \right] \quad (5)$$

注: 当 $n = 2$ 时, 条件(3)~(5)均成为(MH)可解的充分必要条件, 试与(1)及(2)对照.

2 定理的证明

引理 2 设 $B = (b_{ij})$ 为 n 阶 Hermite 矩阵, $s_1 \geq s_2 \geq \dots \geq s_n$ 是 B 的特征值, 则

$$\sum_{1 \leq i < j \leq n} (s_i - s_j)^2 \geq n \|B^{(0)}\|_F^2 \quad (6)$$

证明 见文[3]定理 1, 并利用恒等式

$$\sum_{1 \leq i < j \leq n} (s_i - s_j)^2 = n \sum_{i=1}^n s_i^2 - \left(\sum_{i=1}^n s_i \right)^2$$

引理 3 设 $B = (b_{ij})$ 为 n 阶半正定 Hermite 矩阵, $D = \text{diag}(d_1, d_2, \dots, d_n)$ 且 $b_{ii} = 1, d_i \geq 0$ ($i = 1, 2, \dots, n$). 又 $s_1 \geq s_2 \geq \dots \geq s_n$ 是 $D^{1/2} B D^{1/2}$ 的特征值, 则

$$\|D^{1/2} B^{(0)} D^{1/2}\|_F^2 \geq [s_n(s_n + s_{n-1})/2] \|B^{(0)}\|_F^2 \quad (7)$$

证明 不妨设 $d_1 \geq d_2 \geq \dots \geq d_n$, 于是

$$\begin{aligned} \|D^{1/2} B^{(0)} D^{1/2}\|_F^2 &= \sum_{i=j} d_i d_j |b_{ij}|^2 \geq d_n d_{n-1} \sum_{i \neq j} |b_{ij}|^2 \\ &\geq d_n [(d_n + d_{n-1})/2] \|B^{(0)}\|_F^2 \end{aligned}$$

注意 d_1, d_2, \dots, d_n 是 $D^{1/2} B D^{1/2}$ 的对角元, 据 Schur 优超定理^[4] 知 $d_n \geq s_n, d_n + d_{n-1} \geq s_n + s_{n-1}$, 引理证毕.

定理 1 的证明 由设, $D^{1/2} A D^{1/2}$ 的特征值是 $\lambda_1 \geq \lambda_2 \geq \dots \geq \lambda_n$. 设 m 阶主子阵 $(D^{1/2} A D^{1/2})[i_1, i_2, \dots, i_m]$ 的特征值是 $\mu_1 \geq \mu_2 \geq \dots \geq \mu_m$. 由引理 2 知

$$\sum_{1 \leq i < j \leq m} (\mu_i - \mu_j)^2 \geq m \|(D^{1/2} A^{(0)} D^{1/2})[i_1, i_2, \dots, i_m]\|_F^2$$

由 Cauchy-Poincaré 分隔定理^[4], 对 $i = 1, 2, \dots, m$ 有

$$\lambda_i \geq \mu_i \geq \lambda_{n-m+i} \quad (8)$$

从而

$$\sum_{1 \leq i < j \leq m} (\lambda_i - \lambda_{n-m+j})^2 \geq m \|(D^{1/2} A^{(0)} D^{1/2})[i_1, i_2, \dots, i_m]\|_F^2 \quad (9)$$

再由引理3及(8)知对一切 $1 \leq i_1 < i_2 < \dots < i_m \leq n$ 有

$$\sum_{1 \leq i_1 < i_2 < \dots < i_m \leq n} (\lambda_{i_1} - \lambda_{i_2})^2 \geq m \lambda_n [(\lambda_n + \lambda_{n-1})/2] \|A^{(0)}[i_1, i_2, \dots, i_m]\|_F^2 \quad (10)$$

进一步, 当 $m=2$ 时, 由引理1知对 $1 \leq i_1 < i_2 \leq n$ 有

$$(\mu_1 - \mu_2)^2 \geq [(\mu_1 + \mu_2)^2/2] \|A^{(0)}[i_1, i_2]\|_F^2$$

注意(8), 故有

$$(\lambda_1 - \lambda_n)^2 \geq [(\lambda_{n-1} + \lambda_n)^2/2] \|A^{(0)}[i_1, i_2]\|_F^2 \quad (11)$$

综合(10)、(11)可得定理1结论。

定理2的证明 由设, 矩阵 DA , 从而 $D^{1/2}AD^{1/2}$ 的特征值为 $\lambda_1 \geq \lambda_2 \geq \dots \geq \lambda_n$ 。另不妨设 $d_1 \geq d_2 \geq \dots \geq d_n$ 。由 Wielandt 不等式^[4] 知

$$\prod_{i=1}^m \lambda_{i_f} \leq \prod_{i=1}^m d_i \prod_{i=1}^m \lambda_{i_f}(A) \quad (12)$$

注意 $d_1 \cdot d_2 \cdot \dots \cdot d_m \leq [(d_1 + d_2 + \dots + d_m)/m]^m$ 及据 Schur 优越定理 $d_1 + d_2 + \dots + d_m \leq \lambda_1 + \lambda_2 + \dots + \lambda_m$ 。由(12)可得定理2结论。

定理3的证明 在定理2中令 $m=2$ 。就 $(i_1, i_2) = (1, 2), (1, 3), \dots, (1, n), (2, 3), \dots, (2, n), \dots, (n, n-1)$ 的 $n(n-1)/2$ 种情形列出不等式(4), 然后将这些不等式相加, 可得

$$\sum_{1 \leq i_1 < i_2 \leq n} \lambda_{i_1} \lambda_{i_2} \leq [(\lambda_1 + \lambda_2)/2]^2 \sum_{1 \leq i_1 < i_2 \leq n} \lambda_{i_1}(A) \lambda_{i_2}(A)$$

但 $\sum_{i_1 < i_2} \lambda_{i_1}(A) \lambda_{i_2}(A)$ 恰为 A 的所有二阶主子式之和, 即为: $\sum_{i_1 < i_2} (1 - |a_{ij}|)^2 = n(n-1)/2 -$

$\|A^{(0)}\|_F^2$ 。定理3证毕。

参 考 文 献

- 1 Hadeler K P. Linear Algebra Appl, 1969, 2: 65~86
- 2 Li Luoluo, Linrea Algebra Appl, 1991, 148: 225~236
- 3 De Oliveira G N. Computing, 1970, 9: 95~100
- 4 李 乔. 矩阵论八讲. 上海科技出版社, 1988. 59, 63, 66

Necessary Conditions for the Solvability of Multiplicative Inverse Eigenvalue Problem

Li Luoluo*

Abstract Necessary conditions for the solvability of multiplicative inverse eigenvalue problem over $n \times n$ semipositive definite Hermitian matrices are studied. The necessary conditions presented in this paper turn to be characterizations when $n=2$.

Keywords Hermitian matrix, eigenvalue, inverse problem

* Department of Computer Science