

一类双线性分布参数系统的能控性*

陈云烽

(中山大学数学系)

摘要 讨论自反Banach空间上的一类双线性系统在 mild 解意义下的能控性条件,应用线性算子广义逆和全连续算子的理论,得到了若干判据。

关键词 双线性分布参数系统, 能控性, 全连续算子

在应用领域中,有一类分布参数控制系统的数学模型可归化为如下双线性系统^[1]:

$$\begin{cases} \dot{x}(t) = (A + v(t)B)x(t) + B_0U(t) \\ x(0) = x_0 \end{cases} \quad (1)$$

这里,系统的状态空间是自反Banach空间 X , $x(t) \in X$, 容许控制函数 $u(t)$ ($0 \leq t \leq T$)组成空间 $U_{ad} = L^2[0, T; U]$, U 是某个Hilbert空间, 标量控制函数 $v(t)$ ($0 \leq t \leq T$)是非零连续函数, 记 $V_{ad} = C[0, T] - \{0\}$, 即有 $v(\cdot) \in V_{ad}$. 此外, 算子 $A: X \rightarrow X$ 可生成强连续线性半群(C_0 半群) $S(t)$ ($t \geq 0$), $B \in L(X)$, $B_0 \in L(U; X)$.

本文将讨论系统(1)如下的控制问题: 给定 $x_0, x_T \in X$, $T > 0$, 寻求控制函数 $v^* \in V_{ad}$, $u^* \in U_{ad}$, 使系统(1)在其作用下, 存在同时满足 $x^*(0) = x_0$ 和 $x^*(T) = x_T$ 的 mild解 $x^*(t)$. 如果这样的 v^* 和 u^* 存在, 则称系统(1)在区间 $[0, T]$ 上由 x_0 到 x_T 是能控的; 如果存在 $T > 0$, 使得对任意的 $x_0, x_T \in X$, 系统(1)在区间 $[0, T]$ 上由 x_0 到 x_T 都是能控的, 则称系统(1)完全能控。

因为 A 可生成 C_0 半群 $S(t)$ ($t \geq 0$), 所以在 mild 解意义下, 方程(1)等价于积分方程

$$x(t) = S(t)x_0 + \int_0^t S(t-\tau)[v(\tau)Bx(\tau) + B_0u(\tau)]d\tau \quad (2)$$

从而, 系统(1)在区间 $[0, T]$ 上由 x_0 到 x_T 能控的充要条件是存在 $v^* \in V_{ad}$ 和 $u^* \in U_{ad}$, 使得

$$S(T)x_0 + \int_0^T S(T-\tau)[v^*(\tau)Bx^*(\tau) + B_0u^*(\tau)]d\tau = x_T \quad (3)$$

其中, $x^*(t)$ ($0 \leq t \leq T$)是方程(1)在 $v = v^*$, $u = u^*$ 条件下, 满足 $x^*(0) = x_0$ 的 mild 解。

定义算子 $K: L^2[0, T; U] \rightarrow X$ 如下

本文1991年9月9日收到

* 国家自然科学基金资助项目, 并部分得到中山大学高等学术中心基金会资助

$$Ku \triangleq \int_0^T S(T-\tau)B_0 u(\tau) d\tau \quad (4)$$

则条件(3)可写成

$$Ku^* = x_T - S(T)x_0 - \int_0^T S(T-\tau)v^*(\tau)Bx^*(\tau) d\tau \quad (5)$$

由于 X 是自反Banach空间, 所以 K 的伴随算子为

$$K^* = B_0^* S^*(T-t) \quad (6)$$

$$\text{记 } W(t) \triangleq \int_0^t S(t-\tau)B_0 B_0^* S^*(T-\tau) d\tau, \quad (0 \leq t \leq T) \quad (7)$$

根据线性算子广义逆的理论^[2], K 有广义逆算子

$$K^+ = K^*(KK^*)^+ = B_0^* S^*(T-t)W^+(T) \quad (8)$$

式中, $W^+(T)$ 是 $W(T)$ 的广义逆算子.

为书写方便, 记

$$\xi \triangleq x_T - S(T)x_0 - \int_0^T S(T-s)v(\tau)Bx(\tau) d\tau \quad (9)$$

并引入积分方程

$$x(t) = S(t)x_0 + \int_0^t S(t-\tau)[v(\tau)Bx(\tau) + B_0 B_0^* S^*(T-\tau)W^+(T)\xi] d\tau \quad (10)$$

则有如下定理.

定理 1 对给定的 $x_0, x_T \in X$ 和 $T > 0$, 如果存在 $v^* \in V_{ad}$, 使积分方程(10)当 $v = v^*$ 时, 有解 $x^*(t)$ ($0 \leq t \leq T$), 同时, 将此 v^* 和 x^* 代入(9)式的 v 和 x , 得 ξ 值 $\xi^* \in \text{Range}(K)$ (表示 K 的值域), 那么系统(1)在 $[0, T]$ 上由 x_0 到 x_T 是能控的, 而且实现由 x_0 到 x_T 的迁移之控制可取为 v^* 和 $u^* = K^+\xi^*$.

证明 依设, v^* 和 x^* 满足

$$x^*(t) = S(t)x_0 + \int_0^t S(t-\tau)[v^*(\tau)Bx^*(\tau) + B_0 B_0^* S^*(T-\tau)W^+(T)\xi^*] d\tau$$

注意到式(8), 可知: $x^*(t)$ 是方程(2)对应于 $v = v^*$ 和 $u = K^+\xi^*$ 的解, 也即系统(1)对应于 $v = v^*$ 和 $u = K^+\xi^*$ 的mild解, 且满足 $x^*(0) = x_0$; 进而, 依设, $\xi^* \in \text{Range}(K)$, 从而 $KK^+\xi^* = \xi^*$; 于是

$$x^*(T) = S(T)x_0 + \int_0^T S(T-\tau)u^*(\tau)Bx^*(\tau) d\tau + KK^+\xi^* = x_T.$$

定理 1 得证.

以定理 1 为基础, 针对系统(1)的某些特点, 可导出比较实用的能控性判据. 比如, 当(1)对应的线性系统

$$\begin{cases} \dot{x}(t) = Ax(t) + B_0 u(t) \\ x(0) = x_0 \end{cases} \quad (11)$$

完全能控时, 根据线性系统的基础理论^[3], 有

$$\text{Range}(K) = X,$$

且对任意 $T > 0$, $W(T)$ 存在有界逆算子 $W^{-1}(T)$, 从而有 $W^+(T) = W^{-1}(T)$, 积分方程 (10) 可写成

$$x(t) = h(t; x_0, x_T, T) + (G_v x)(t) \quad (12)$$

式中,
$$h(t; x_0, x_T, T) \triangleq (I - W(t)W^{-1}(T))S(t)x_0 + W(t)W^{-1}(T)x_T \quad (13)$$

$$(G_v x)(t) \triangleq \int_0^t S(t-\tau)v(\tau)Bx(\tau)d\tau - W(t)W^{-1}(T)\int_0^T S(T-\tau)v(\tau)Bx(\tau)d\tau \quad (14)$$

即有: $h(\cdot; x_0, x_T, T) \in C[0, T; X]$, G_v 是 $C[0, T; X]$ 上映入自身的有界连续线性算子.

引理 1 如果 B 是 X 上的列紧算子, 那么, 对任意给定的 $v \in V_{ad}$ 和有界集 $D \subset C[0, T; X]$, 集合

$$R_t \triangleq \{ (G_v x)(xt) \mid (\cdot) \in D \} \quad (0 \leq t \leq T)$$

都是 X 中的列紧集.

证明 因为 D 是 $C[0, T; X]$ 中的有界集, 又 $0 \leq t \leq T$, 故 $\{x(\tau) \mid x(\cdot) \in D, 0 \leq \tau \leq t\}$ 是 X 中的有界集. 依设, B 是列紧算子, 故

$$N_t \triangleq \{ Bx(\tau) \mid x(\cdot) \in D, 0 \leq \tau \leq t \} \quad (0 \leq t \leq T)$$

是 X 中的列紧集; 记

$$Q_t \triangleq \{ S(t-\tau)v(\tau)Bx(\tau) \mid x(\cdot) \in D, 0 \leq \tau \leq t \},$$

$$P_t \triangleq \{ M(t)W^{-1}(T)S(T-\tau)v(\tau)Bx(\tau) \mid x(\cdot) \in D, 0 \leq \tau \leq T \},$$

由于 $v \in V_{ad}$, $S(t) (t \geq 0)$ 是 C_0 半群, 从而由 N_t 的列紧性和 $v(t)$, $S(t)$ 在 $[0, T]$ 上的一致连续性, 可得 Q_t 和 P_t 都是 X 中的列紧集. 因此, 集合

$$M_t \triangleq \overline{CO}(tQ_t) - \overline{CO}(TP_t)$$

也是列紧集

利用公式

$$\frac{1}{t} \int_0^t y(\tau) d\tau \in \overline{CO}\{y(\tau) \mid 0 \leq \tau \leq t\}, \quad \forall y(\cdot) \in C[0, T; X], \quad 0 \leq t \leq T,$$

可知 $(G_v x)(t) \in M_t, \quad \forall x(\cdot) \in D, \quad 0 \leq t \leq T.$

因此, $R_t \subset M_t (0 \leq t \leq T)$; 由于 M_t 列紧, 故 R_t 也是列紧集.

引理 2 如果 B 是 X 上的列紧算子, $v \in V_{ad}$, 那么由式 (14) 所定义的算子 G_v 是全连续线性算子.

证明 记 $y(t) = (G_v x)(t), \quad 0 \leq t \leq T;$

由范数性质和 Schwarz 不等式, 可得

$$\begin{aligned} \|y(t)\|^2 &\leq 2 \left(\int_0^t \|S(t-\tau)v(\tau)B\|^2 d\tau \cdot \int_0^t \|x(\tau)\|^2 d\tau \right. \\ &\quad \left. + \int_0^T \|W(t)W^{-1}(T)S(T-\tau)v(\tau)B\|^2 d\tau \cdot \int_0^T \|x(\tau)\|^2 d\tau \right), \end{aligned}$$

$$\begin{aligned} \|y(t_1) - y(t_2)\|^2 &\leq 4 \left(\int_0^{t_2} \|S(t_1 - \tau) - S(t_2 - \tau)\|^2 \cdot \|v(\tau)B\|^2 d\tau \right. \\ &\quad \cdot \int_0^{t_2} \|x(\tau)\|^2 d\tau + \int_{t_2}^{t_1} \|S(t_1 - \tau)v(\tau)B\|^2 d\tau \cdot \int_{t_2}^{t_1} \|x(\tau)\|^2 d\tau \left. \right) \\ &\quad + 2 \int_0^T \|W(t_1) - W(t_2)\|^2 \cdot \|W^{-1}(T)S(T - \tau)v(\tau)B\|^2 d\tau \cdot \int_0^T \|x(\tau)\|^2 d\tau, \\ &\quad (t_2 \leq t_1) \end{aligned}$$

所以,对 $C[0, T; X]$ 中的任意有界集 D ,定义于 $[0, T]$ 上在 X 中取值的函数族 $\{(G_v x)(\cdot) | x(\cdot) \in D\}$ 是一致有界,且等度一致连续。

其次,由于 B 是列紧算子,依引理1,对任意的 $t \in [0, T]$, $\{(G_v x)(t) | x(\cdot) \in D\}$ 是 X 中的列紧集。

所以,根据推广了的Ascoli-Arzelà定理^[4]得 $\{(G_v x)(\cdot) | x(\cdot) \in D\}$ 是 $C[0, T; X]$ 中的一个列紧集,故 G_v 是列紧算子,又 G_v 是连续线性算子,从而 G_v 是全连续线性算子。

引理3 存在 $v^* \in V_{ad}$,使得 $1 \notin \sigma(G_{v^*})$ 。这里, $\sigma(G_{v^*})$ 表示算子 G_{v^*} 的谱集。

证明 依式(14),可知对任意实数 $\beta \neq 0$,有 $G_{\beta v} = \beta G_v$,所以,当 $\lambda \in \sigma(G_v)$ 时, $\beta \lambda \in \sigma(G_{\beta v})$ 。

根据全连续线性算子的性质^[4],对任意 $v \in V_{ad}$, $\sigma(G_v)$ 或是有穷集,或是以0为唯一聚点的可数集,于是,当 $1 \in \sigma(G_v)$ 时,必有实数 $\beta \neq 0$ 使 $1 \notin \sigma(G_{\beta v})$ 。同时,由于当 $v \in V_{ad}$ 和 $\beta \neq 0$ 时,必有 $\beta v \in V_{ad}$,所以引理3得证。

定理2 如果系统(1)对应的线性系统(11)完全能控,那么当 B 是列紧算子时,系统(1)也完全能控。

证明 对任意给定的 $x_0, x_r \in X$ 和 $T > 0$,依引理3和2知:有 $v^* \in V_{ad}$,使 $1 \notin \sigma(G_{v^*})$,而且 G_{v^*} 是Banach空间 $C[0, T; X]$ 上的全连续线性算子,从而 $(G_{v^*} - I)$ 存在有界逆算子 $(G_{v^*} - I)^{-1}$ 。于是,对任意的 $h(t; x_0, x_r, T)$,积分方程(12)(也即在本定理假设下的积分方程(10))都有解 $x^*(t)$ ($0 \leq t \leq T$)。

其次,由于线性系统(11)完全能控,从而 $\text{Renge}(K) = X$,故与 v^*, x^* 对应的由(9)式确定的 $\xi^* \in \text{Renge}(K)$ 。

根据定理1,得到系统(1)在区间 $[0, T]$ 上由 x_0 到 x_r 能控。由于 x_0, x_r 和 $T > 0$ 的任意性,所以,系统(1)完全能控。定理2得证。

参 考 文 献

- 1 赵怡,黄煜,非线性分布参数控制系统理论。广州:广东科技出版社,1990,387~438
- 2 Nashed M Z. Generalized Inverses and Applications. New York; Academic Prees, 1976, 397~454
- 3 Curtain R F, Pritchard A J. Infinite Dimensional Linear Systems Theory. New York; Springer-Verlag, 1978, 51~72
- 4 关肇直. 泛函分析讲义。北京:高等教育出版社,1960, 32~36, 253~273

Controllability for a Class of Bilinear Distributed Parameter Control Systems

Chen Ynufeng*

Abstract We discuss the controllability of the bilinear distributed parameter system of the form $\dot{x}(t) = (A + v(t)B)x(t) + B_0u(t)$ using the theory of generalized inverses of linear operator and the theory of completely continuous linear operator. Some controllability criterions are derived.

Keywords bilinear distributed parameter system, controllability, completely continuous linear operator

~~~~~

· 简 讯 ·

### 《科技成果转化及厂校合作问题首届国际 研讨会论文汇编》出版

《科技成果转化及厂校合作问题首届国际研讨会》于1992年6月在广州中山大学召开，参加会议的代表有来自加拿大及国内各地代表80多人。为了使有关单位更好地了解这次会议所研讨的问题，我们编辑了《论文汇编》，刊登于中山大学学报论丛1992年第4期（国内外公开发行）。该书对从事科技管理和科技开发专业人员有较好的参考价值。

《论文汇编》共收集论文49篇，约25.5万字，16开本，每本5.80元（包括邮资）。邮购请与中山大学学报编辑部潘丽冰联系。

（陈 华）

• Department of Mathematics, Zhongshan University