

一维不恒定流方程组的一种隐式特征差分格式

杨世孝 肖子良
(计算机科学系)

摘要 建立了一种隐式特征差分格式,证明了这种格式应用于线性常系数方程组是绝对稳定的,将这种格式应用于一维网河不恒定流的计算,数值结果表明,应用效果是好的。

关键词 网河,不恒定流,隐式特征差分法

1 基本方程组的特征形式

一维明渠不恒定流满足下列方程

$$\begin{cases} \frac{\partial F}{\partial t} + \frac{\partial Q}{\partial x} = q \end{cases} \quad (1)$$

$$\begin{cases} \frac{\partial u}{\partial t} + u \frac{\partial u}{\partial x} + g \frac{\partial Z}{\partial x} = -g \frac{u|u|}{Rc^2} \end{cases} \quad (2)$$

式中, Z 、 Q 、 F 、 u 、 R 和 q 分别表示在时刻 t 沿河距离为 x 的断面的水位、流量、过水面积、平均流速、水力半径和沿河单位长度的侧向入流量。 c 为谢才系数, g 为重力加速度。它们有如下关系:

$$\frac{\partial F}{\partial Z} = B \text{ (水面宽)}, \quad Q = Fu,$$

$$c = \frac{1}{n} R^{1/6} \text{ (} n \text{ 为糙率)}$$

若以 $Z(x, t)$ 、 $Q(x, t)$ 作为基本未知函数, 则方程组 (1)、(2) 可写为

$$\begin{cases} \frac{\partial Z}{\partial t} + \frac{1}{B} \frac{\partial Q}{\partial x} = \frac{q}{B}, \end{cases} \quad (3)$$

$$\begin{cases} \frac{\partial Q}{\partial t} + (gF - \frac{Q^2}{F^2} B) \frac{\partial Z}{\partial x} + 2 \frac{Q}{F} \frac{\partial Q}{\partial x} = -g \frac{Q|Q|n^2}{FR^{4/3}} + \frac{Q}{F} q \end{cases} \quad (4)$$

(3)和(4)又可写成矩阵形式

$$\frac{\partial \varphi}{\partial t} + A \frac{\partial \varphi}{\partial x} = \psi \quad (5)$$

其中

本文1990年11月7日收到

国家自然科学基金和广东省自然科学基金资助项目

$$\varphi = \begin{pmatrix} Z \\ Q \end{pmatrix}, \quad A = \begin{pmatrix} 0 & \frac{1}{B} \\ gF - \frac{Q^2}{F^2} & 2\frac{Q}{F} \end{pmatrix},$$

$$\psi = \begin{pmatrix} \psi_1 \\ \psi_2 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} \frac{q}{B} \\ -g \frac{Q|Q|n^2}{FR^4} + \frac{Q}{F} q \end{pmatrix}.$$

矩阵 A 有两个特征值

$$\lambda_1 = \frac{Q}{F} + \sqrt{g \frac{F}{B}}, \quad \lambda_2 = \frac{Q}{F} - \sqrt{g \frac{F}{B}}.$$

矩阵 A 对应于 λ_1 和 λ_2 的行特征向量分别为

$$l_1 = (-B\lambda_2, 1), \quad l_2 = (-B\lambda_1, 1),$$

即

$$l_i A = \lambda_i l_i, \quad i = 1, 2 \quad (6)$$

用 l_i 左乘 (5) 两边, 有

$$l_i \left(\frac{\partial \varphi}{\partial t} + \lambda_i \frac{\partial \varphi}{\partial x} \right) = l_i \psi, \quad i = 1, 2. \quad (7)$$

于是, 沿特征线族

$$\frac{dx}{dt} = \lambda_i \quad (8)$$

有特征关系

$$l_i \frac{d\varphi}{dt} = l_i \psi. \quad (9)$$

这样, 偏微分方程组 (1) ~ (2) 化成了特征形式的常微分方程组 (8) ~ (9), 而 (8) ~ (9) 乃是建立特征差分法的基础。

2 隐式特征差分法

考虑将方程组 (8) ~ (9) 于第 $j-1$ 断面和第 j 断面之间, 从 t_k 时刻到 t_{k+1} 时刻的离散化, 为简单起见, 记 $P_1 = (x_{j-1}, t_{k+1})$, $P_2 = (x_j, t_{k+1})$, $E_1 = (x_{j-1}, t_k)$, $E_2 = (x_j, t_k)$. 作一直线 $t = t_k + \gamma \Delta t$, 交 $P_1 E_1$ 于 F_1 , 交 $P_2 E_2$ 于 F_2 , 其中, $\Delta t = t_{k+1} - t_k$, $\gamma (0 \leq \gamma < 1)$ 为常数. 设 $|u| < \sqrt{gF/B}$, 这时, $\lambda_1 > 0$, $\lambda_2 < 0$.

(i) 过点 P_1 作近似特征线

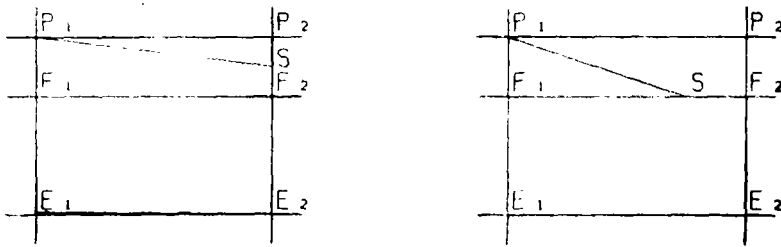
$$\frac{dx}{dt} = (\lambda_2)_{P_1}$$

若这条特征线交 $P_2 E_2$ 于 S (图 1 (1)), 这时

$$t_s = t_{k+1} + \Delta x / (\lambda_2)_{E_1} > t_k + \gamma \Delta t,$$

式中, $\Delta x = x_j - x_{j-1}$. 点 S 上的水位和流量可通过线性插值近似求得

$$\varphi_s = \beta \varphi_{F_2} + (1 - \beta) \varphi_{E_2} \quad (10)$$



(1) CHARACTERISTIC MEETS P₁F₁;
(特征线与 P₁F₁ 相交)

(2) CHARACTERISTIC MEETS F₁F₂;
(特征线与 F₁F₂ 相交)

图1 特征差分网格

Fig.1 Characteristic difference gride

$$\beta = (t_s - t_k) / \Delta t = 1 + \Delta x / [\Delta t (\lambda_2)_{P_1}].$$

方程(9)沿这条特征线积分, 得

$$(I_2)_{P_1} (\varphi_{P_1} - \varphi_s) \doteq (I_2 \phi)_{P_1} (t_{k+1} - t_s) \tag{11}$$

$$(I_2)_{P_1} (\varphi_{P_1} - \beta \varphi_{P_2}) \doteq (I_2)_{P_1} [-\Delta x (\phi / \lambda_2)_{P_1} + (1 - \beta) \varphi_{E_2}] \tag{12}$$

若这条特征线交 F₁F₂ 于 S (图 1 (2)), 这时

$$x_s = x_{j-1} - (\lambda_2)_{P_1} (1 - \gamma) \Delta t \leq x_j,$$

即 $\Delta x \geq - (1 - \gamma) \Delta t (\lambda_2)_{P_1}$, 而

$$\varphi_s \doteq (1 - \alpha) \varphi_{P_1} + \alpha \varphi_{F_2} \tag{13}$$

式中, $\alpha = - (1 - \gamma) \Delta t (\lambda_2)_{P_1} / \Delta x$,

$$\varphi_{F_i} \doteq \gamma \varphi_{P_i} + (1 - \gamma) \varphi_{E_i}, \quad i = 1, 2 \tag{14}$$

把(14)代入(13), 得

$$\varphi_s = (1 - \alpha) \gamma \varphi_{P_1} + \alpha \gamma \varphi_{P_2} + (1 - \alpha) (1 - \gamma) \varphi_{E_1} + \alpha (1 - \gamma) \varphi_{E_2},$$

代入(11)(其中 $t_{k+1} - t_s = (1 - \gamma) \Delta t$), 得

$$\begin{aligned} (I_2)_{P_1} \{ [1 - (1 - \alpha) \gamma] \varphi_{P_1} - \alpha \gamma \varphi_{P_2} \} \\ \doteq (I_2)_{P_1} \{ (1 - \gamma) \Delta t \phi_{P_1} + (1 - \alpha) (1 - \gamma) \varphi_{E_1} + \alpha (1 - \gamma) \varphi_{E_2} \} \end{aligned} \tag{15}$$

(12)和(15)可合并为

$$\begin{aligned} (I_2)_{j-1}^{k+1} \{ [1 - (1 - \eta_1) \gamma_1] \varphi_{j-1}^{k+1} - \eta_1 \gamma_1 \varphi_i^{k+1} \} \\ = (I_2)_{j-1}^{k+1} \{ \delta_1 \phi_{j-1}^{k+1} + (1 - \eta_1) (1 - \gamma_1) \varphi_{j-1}^k + \eta_1 (1 - \gamma_1) \varphi_i^k \} \end{aligned} \tag{16}$$

$$\text{式中, } \eta_1 = \begin{cases} 1, & \text{当 } \Delta x < - (1 - \gamma) \Delta t (\lambda_2)_{j-1}^{k+1} \text{ 时} \\ - (1 - \gamma) \Delta t (\lambda_2)_{j-1}^{k+1} / \Delta x, & \text{当 } \Delta x \geq - (1 - \gamma) \Delta t (\lambda_2)_{j-1}^{k+1} \text{ 时} \end{cases} \tag{17}$$

$$\delta_1 = \begin{cases} -\Delta x / (\lambda_2)_{i-1}^{k+1}, & \text{当 } \Delta x < -(1-\gamma)\Delta t (\lambda_2)_{i-1}^{k+1} \text{ 时} \\ (1-\gamma)\Delta t, & \text{当 } \Delta x \geq -(1-\gamma)\Delta t (\lambda_2)_{i-1}^{k+1} \text{ 时} \end{cases} \quad (18)$$

$$\gamma_1 = \begin{cases} 1 + \Delta x / [\Delta t (\lambda_2)_{i-1}^{k+1}], & \text{当 } \Delta x < -(1-\gamma)\Delta t (\lambda_2)_{i-1}^{k+1} \text{ 时} \\ \gamma, & \text{当 } \Delta x \geq -(1-\gamma)\Delta t (\lambda_2)_{i-1}^{k+1} \text{ 时} \end{cases} \quad (19)$$

(ii)类似地, 从点 P_2 作近似特征线

$$\frac{dx}{dt} = (\lambda_1)_{P_2},$$

并且沿这条特征线积分方程(9), 可得离散方程为

$$\begin{aligned} (l_1)_i^{k+1} \{ -\eta_2 \gamma_2 \phi_{i-1}^{k+1} + [1 - (1-\eta_2)\gamma_2] \phi_i^{k+1} \} \\ = (l_1)_i^{k+1} \{ \delta_2 \phi_i^{k+1} + \eta_2 (1-\gamma_2) \phi_{i-1}^k + (1-\eta_2)(1-\gamma_2) \phi_i^k \} \end{aligned} \quad (20)$$

$$\text{式中, } \delta_2 = \begin{cases} \Delta x / (\lambda_1)_i^{k+1}, & \text{当 } \Delta x < (1-\gamma)\Delta t (\lambda_1)_i^{k+1} \\ (1-\gamma)\Delta t, & \text{当 } \Delta x \geq (1-\gamma)\Delta t (\lambda_1)_i^{k+1} \end{cases} \quad (21)$$

$$\gamma_2 = \begin{cases} 1 - \Delta x / [\Delta t (\lambda_1)_i^{k+1}], & \text{当 } \Delta x < (1-\gamma)\Delta t (\lambda_1)_i^{k+1} \text{ 时} \\ \gamma, & \text{当 } \Delta x \geq (1-\gamma)\Delta t (\lambda_1)_i^{k+1} \text{ 时} \end{cases} \quad (22)$$

$$\eta_2 = \begin{cases} 1, & \text{当 } \Delta x < (1-\gamma)\Delta t (\lambda_1)_i^{k+1} \text{ 时} \\ (1-\gamma)\Delta t (\lambda_1)_i^{k+1} / \Delta x, & \text{当 } \Delta x \geq (1-\gamma)\Delta t (\lambda_1)_i^{k+1} \text{ 时} \end{cases} \quad (23)$$

(16)和(20)就是隐式特征差分格式。

3 稳定性分析

(16)和(20)可写成如下矩阵形式

$$\begin{aligned} \begin{pmatrix} 1 - (1-\eta_1)\gamma_1, & 0 \\ 0, & -\eta_2\gamma_2 \end{pmatrix} L_{i-1}^{k+1} \phi_{i-1}^{k+1} + \begin{pmatrix} -\eta_1\gamma_1, & 0 \\ 0, & 1 - (1-\eta_2)\gamma_2 \end{pmatrix} L_{i-1}^{k+1} \phi_i^{k+1} \\ = \begin{pmatrix} (1-\eta_1)(1-\gamma_1), & 0 \\ 0, & \eta_2(1-\gamma_2) \end{pmatrix} L_{i-1}^{k+1} \phi_{i-1}^k \\ + \begin{pmatrix} \eta_1(1-\gamma_1), & 0 \\ 0, & (1-\eta_2)(1-\gamma_2) \end{pmatrix} L_{i-1}^{k+1} \phi_i^k + \begin{pmatrix} \delta_1 (l_2)_{i-1}^{k+1} \phi_{i-1}^{k+1} \\ \delta_2 (l_1)_i^{k+1} \phi_i^{k+1} \end{pmatrix} \end{aligned} \quad (24)$$

$$\text{式中, } L_{i-1}^{k+1} = \begin{pmatrix} (l_2)_{i-1}^{k+1} \\ (l_1)_i^{k+1} \end{pmatrix}.$$

设方程(5)中的矩阵 A 为常数矩阵。这时, λ_1 和 λ_2 为常数, L 为常数矩阵。现用分离变量

法来分析这种模型的差分格式(24)的稳定性. 令 $\phi \equiv 0$ 和 $\phi_j^k = V^k e^{i\sigma jh}$, 代入(24), 整理后得

$$V^{k+1} = GV^k,$$

式中,
$$G = L^{-1} \begin{pmatrix} \xi_2 & 0 \\ 0 & \xi_1 \end{pmatrix} L,$$

$$\xi_1 = \frac{\eta_2(1-\gamma_2) + (1-\eta_2)(1-\gamma_2)\exp(i\sigma h)}{-\eta_2\gamma_2 + [1 - (1-\eta_2)\gamma_2]\exp(i\sigma h)}, \quad (h = \Delta x \text{ 为常数})$$

$$\xi_2 = \frac{(1-\eta_1)(1-\gamma_1) + \eta_1(1-\gamma_1)\exp(i\sigma h)}{1 - (1-\eta_1)\gamma_1 - \eta_1\gamma_1\exp(i\sigma h)}.$$

显然, G 的特征值为 ξ_1 和 ξ_2 , 而属于 ξ_1 和 ξ_2 的行特征向量分别为 l_1 和 l_2 . 由于 l_1 和 l_2 分别是矩阵 A 属于 λ_1 和 λ_2 的特征向量, 且 $\lambda_1 \neq \lambda_2$ (因为方程组(5)是双曲型的), 所以 l_1 和 l_2 线性无关, 故行列式 $|L| \neq 0$. 由[1], 格式(24)关于初值稳定的充要条件为 $|\xi_1| \leq 1$ 及 $|\xi_2| \leq 1$. 而 $|\xi_1| \leq 1$ 当且仅当

$$-\eta_2(1-\eta_2-\gamma_2+2\eta_2\gamma_2)(1-\cos\sigma h) \leq 0 \tag{25}$$

对一切 $\sigma = 2\pi l, l = 0, \pm 1, \pm 2, \dots$ 成立. 因为 $\eta_2 \geq 0$, 所以要使(25)成立, 只需

$$1 - \eta_2 - \gamma_2 + 2\eta_2\gamma_2 \geq 0 \tag{26}$$

由(22)和(23)及 $\lambda_1 > 0$ 可知, 当 $\Delta x < (1-\gamma)\Delta t\lambda_1$ 时

$$1 - \eta_2 - \gamma_2 + 2\eta_2\gamma_2 = 1 - \frac{\Delta x}{\Delta t\lambda_1} \geq 1 - (1-\gamma) = \gamma \geq 0;$$

而当 $\Delta x \geq (1-\gamma)\Delta t\lambda_1$ 时,

$$1 - \eta_2 - \gamma_2 + 2\eta_2\gamma_2 = (1-\gamma) \left[1 + \gamma\lambda_1 \frac{\Delta t}{\Delta x} - (1-\gamma)\lambda_1 \frac{\Delta t}{\Delta x} \right] \geq 0.$$

故(26)式成立. 同理可证 $|\xi_2| \leq 1$. 所以格式(24)对于 $0 \leq \gamma < 1$ 是绝对稳定的.

4 具体计算格式及数值应用实例

用Newton迭代格式求解离散方程组(16), (20), 其具体计算公式如下:

$$\begin{cases} A_1^{(m)} Z_{j-1}^{k+1,m+1} + B_1^{(m)} Q_{j-1}^{k+1,m+1} + C_1^{(m)} Z_j^{k+1,m+1} + D_1^{(m)} Q_j^{k+1,m+1} = E_1^{(m)} & (27) \\ A_2^{(m)} Z_{j-1}^{k+1,m+1} + B_2^{(m)} Q_{j-1}^{k+1,m+1} + C_2^{(m)} Z_j^{k+1,m+1} + D_2^{(m)} Q_j^{k+1,m+1} = E_2^{(m)} & (28) \end{cases}$$

式中

$$A_1^{(m)} = [1 - (1-\eta_1)\gamma_1] (B\lambda_1)_{j-1}^* - \delta_1 q_{j-1} (u/H)_{j-1}^* + gn^2 \delta_1 (u|u|B)_{j-1}^* / \bar{R};$$

$$B_1^{(m)} = -1 + (1-\eta_1)\gamma_1 + \delta_1 (q/F)_{j-1}^* - 2\delta_1 gn^2 |u_{j-1}^*| / \bar{R};$$

$$C_1^{(m)} = -\eta_1\gamma_1 (B\lambda_1)_{j-1}^*; \quad D_1^{(m)} = \eta_1\gamma_1;$$

$$E_1^{(m)} = \delta_1 \{ (q\lambda_1)_{j-1}^* + gn^2 [-(Q|u|)_{j-1}^* + (u|u|BZ)_{j-1}^*] / \bar{R} - (q/F)_{j-1}^* \};$$

$$-(quZ/H)_{i-1}^* \} + (1-\gamma_1) \{ -\eta_1 Q_i^k - (1-\eta_1) Q_{i-1}^k + (B\lambda_1)_{i-1}^* [\eta_1 Z_i^k + (1-\eta_1) Z_{i-1}^k] \},$$

$$A_2^{(m)} = -\eta_2 \gamma_2 (B\lambda_2)_i^* ; \quad B_2^{(m)} = \eta_2 \gamma_2 ;$$

$$C_2^{(m)} = [1 - (1-\eta_2) \gamma_2] (B\lambda_2)_i^* + \delta_2 g n^2 (u|u|B_j^* / \bar{R}_j - \delta_2 (qu/H)_i^* ;$$

$$D_2^{(m)} = -1 + (1-\eta_2) \gamma_2 + \delta_2 (q/F)_i^* - 2\delta_2 g n^2 |u_i^*| / \bar{R}_j ;$$

$$E_2^{(m)} = \delta_2 \{ (q\lambda_2)_i^* + g n^2 [- (Q|u|)_i^* + (u|u|BZ)_i^*] / \bar{R}_j - (quz/H)_i^* \} + (1-\gamma_2) \{ -\eta_2 Q_{i-1}^k - (1-\eta_2) Q_i^k + (B\lambda_2)_i^* [\eta_2 Z_{i-1}^k + (1-\eta_2) Z_i^k] \} ;$$

$$H = F/B ; \quad \bar{R}_j = \{ \gamma (R_{i-1}^* + R_i^*) / 2 + (1-\gamma) (R_{i-1}^k + R_i^k) / 2 \}^{4/3} ;$$

而 γ_1 、 γ_2 、 δ_1 、 δ_2 、 η_1 和 η_2 由(17)–(19)、(21)–(23)给出。式中,符号 F_j^* 等表示当水位和流量取第 m 次迭代近似值 $Z_{i-1}^{k+1,m}$ 、 $Q_{i-1}^{k+1,m}$ 、 $Z_j^{k+1,m}$ 和 $Q_j^{k+1,m}$ 时的相应值,如 $F_j^* = F(x_j, Z_j^{k+1,m})$ 。

方程(27)、(28)称为内断面方程,对于单一直河段,再加上每个边界断面给定的一个边界条件(边界方程),就可以求出水位和流量的第 $m+1$ 次迭代近似;对于含有汉口的网河,还需补充汉口连接方程。汉口连接方程按[2]给出。内断面方程、汉口连接方程和边界方程,合起来就构成了网河离散方程组,可用网河稀疏矩阵子块消元法求出这个方程组的第 $m+1$ 次迭代近似,这样反复迭代,直到收敛为止,然后再转入下一时刻计算(稀疏矩阵子块消元法将另文介绍)。

本文用上述方法对珠江三角洲广州河段的一个具有104条直河段、62个汉口、11个边界条件、330个断面的网河区进行了计算(其水文背景是1982年3月25日3时至26日15时的枯水大潮典型潮)。结果表明,计算潮流过程线与实测潮流过程线均符合较好,下面的图形是在M340计算机上计算,并通过其图形终端输出的结果。图2中,符号“×”的中心表示计算值,实线(连续曲线)表示实测潮流过程线,(图2(a)和图2(b)是上游边界断面,图2(d)是下游边界断面,它们都是以流量过程作为边界条件,而图2(c)、图2(e)和图2(f)是网河中间的断面)。“SECT153Z”、“SECT306Q”分别表示第153号断面的水位和第306号断面的流量计算值与实测值的比较图。

参 考 文 献

- 1 里奇特迈尔R D. 初值问题的差分方法(何旭初等译). 北京: 科学出版社, 1966. 56~58
- 2 李岳生, 杨世孝, 肖子良. 中山大学学报(自然科学版), 1977(3): 27~37

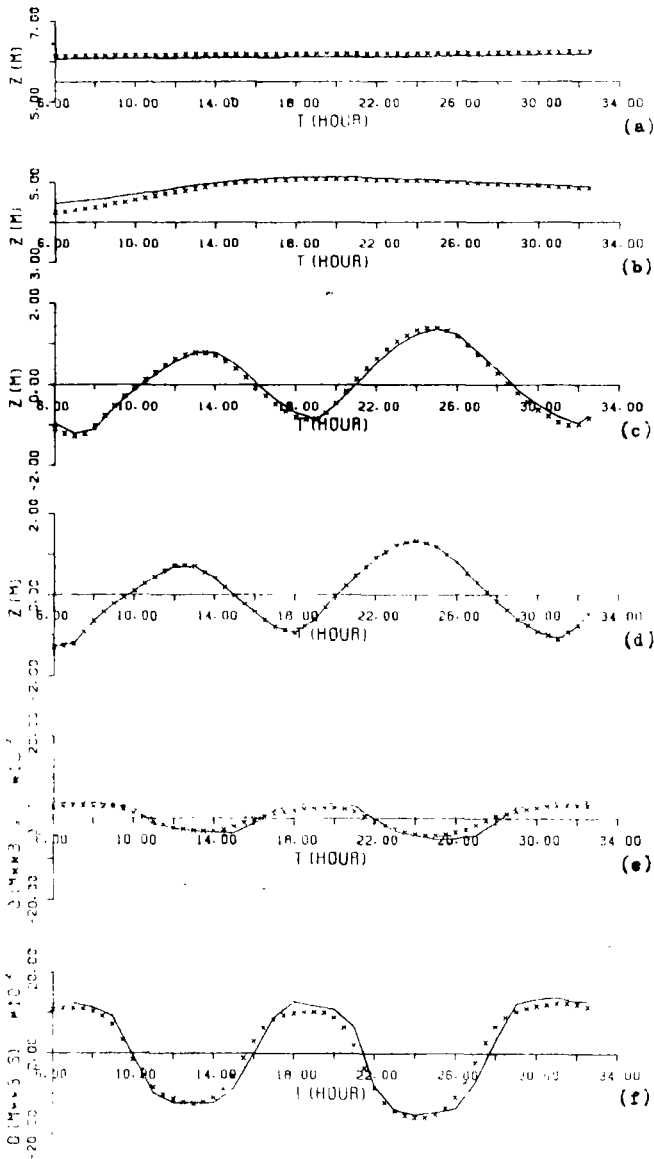


图2 某些断面水位或流量的实测值与计算值比较

Fig. 2 Comparing actual value with computing value for water level or discharge on some sections

A Kind of Implicit Characteristic-Difference Schemes for One-dimensional Unsteady Flow

Yang Shixiao* Xiao Ziliang

Abstract We present a kind of implicit characteristic-difference schemes, and prove that this kind of schemes is unconditional stable for systems of linear equations with constant coefficients. The scheme is used in computation for one-dimensional unsteady flow, and numerical results are presented, showing the effectiveness of the scheme.

Keywords waterway network, unsteady flow, implicit method of characteristic difference

* Department of Computer Science