

· 研究简报 ·

非线性扭转弹性体弹性系数表示式的讨论

唐孟希

(中山大学物理学系)

摘要 本文比较了非线性扭转弹性体弹性系数的3种表示,证明了满足物理学基本原则的表示式必定是扭转角的偶函数。

关键词 扭转弹性体,非线性

在处理由扭转弹性体和绕定轴转动的刚体组成的扭转谐振系统时,用简单的力学方法可以建立起系统的运动方程

$$I\ddot{\varphi} + k\dot{\varphi} + c\varphi = 0 \quad (1)$$

其中 I 为刚体的转动惯量, k 为阻尼系数, c 是弹性体的扭转弹性系数。当不计及非线性影响时,(1)式的解为振幅呈指数衰减的正弦函数。但实际的弹性体的 c 不是常数,(1)式中的 c 要写成转角 φ 的函数,即

$$c = c(\varphi)$$

究竟采用什么形式的 $c(\varphi)$ 较为合理,这是十分重要的。本文作者在文献[1]中把 c 写成

$$c(\varphi) = c_0 + c_1|\varphi| \quad (2)$$

[2]文对这个表示式提出了不同的看法。[2]文不仅认为(2)是不正确的,而且在计算中还采用下式:

$$c(\varphi) = \sum_{j=0}^{\infty} c_j \varphi^j, \quad (j=0,1,2,3\cdots) \quad (3)$$

类似的表示式在文[3]中也有出现。除(2)、(3)式外,在不少专著中,例如文献[4],还可以见到形如

$$c(\varphi) = \sum_{j=0}^{\infty} c_{2j} \varphi^{2j}, \quad (j=0,1,2,3\cdots) \quad (4)$$

的表示式。

本文的目的是希望证明,对于非线性扭转弹性体,表示式(2)、(4)都是合理的,而(3)式由于违反物理学基本规律,因而是错误的。

1 物理学基本规律对 $c(\varphi)$ 的一般要求

物理学对物理量的要求是,对于一切可测量,它们的表示式应该是连续、有限和单

本文1991年11月20日收到

值的函数；坐标系的引入，其目的只是计算的方便，可测物理量的大小应与坐标系的选择方式无关。下面，从这条规律出发，让我们来看看扭转弹性体的 $c(\varphi)$ 应有怎样的基本要求。

把弹性体的扭转平衡位置定为坐标系的角向原点，即 $\varphi = 0$ 的位置。这时由于扭转角为零，恢复力矩也为零。按惯例， M 的正方向与 φ 的正方向应选为一致，这时表示式

$$M(\varphi) = -c(\varphi) \cdot \varphi \quad (5)$$

成立。式中的负号表示恢复力矩 M 的方向与 φ 的方向相反。

在同一个角向原点的基础上，我们分别建立2个方向相反的坐标系 Σ 和 Σ' (图1)。在 Σ 中逆时针向偏离平衡位置时 φ 为正，顺时针向偏离平衡位置时 φ 为负，而在 Σ' 中则相反，即顺时针向偏离平衡位置时 φ 为正，逆时针向偏离平衡位置时 φ 为负。对于同一扭转弹性体，由于在 Σ 系中的位置 A 和 Σ' 系中的位置 A' ，是同一物理状态在不同坐标系中的表示，应有

$$M(A) = -M'(A')$$

即
$$M(\varphi) = -M'(-\varphi)$$

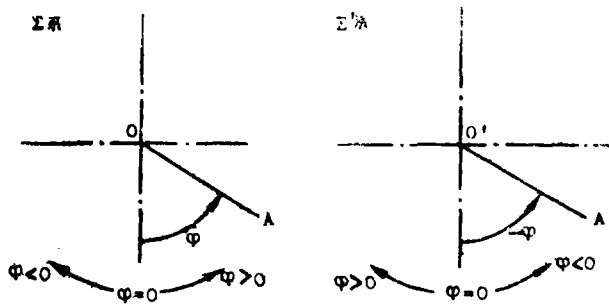


图1 两种旋向不同的坐标系

Fig. 1 Coordinate system at two different orientations

在 Σ 系中，我们有

$$M(\varphi) = -c(\varphi) \cdot \varphi$$

在 Σ' 系中，我们有

$$M'(-\varphi) = -c(-\varphi) \cdot (-\varphi)$$

综合以上各式，得

$$-c(\varphi) \cdot \varphi = c(-\varphi) \cdot (-\varphi)$$

即
$$c(\varphi) = c(-\varphi) \quad (6)$$

也就是说 $c(\varphi)$ 应是转角 φ 的偶函数。

2 (3)式违反物理学基本规律

从图1可见， Σ 系中的位置 A 和 Σ' 系中的位置 A' 实际上是同一客观状态在不同坐标系中的表示。按物理量的大小与坐标系选择方式无关的要求，由于两坐标系中 M 的正向规定相反，在 Σ 系中计算出来的 M 与在 Σ' 系计算出来的 M' 应该是大小相等、符号相反的。然而由(3)式却得到

$$M = M(\varphi) = -c(\varphi) \cdot \varphi = -\sum_{j=0}^{\infty} c_j \varphi^j \cdot \varphi = -\sum_{j=0}^{\infty} c_j \varphi^{j+1}$$

$$M' = M'(-\varphi) = -c(-\varphi) \cdot (-\varphi) = -\sum_{j=0}^{\infty} c_j (-\varphi)^j \cdot (-\varphi) = \sum_{j=0}^{\infty} (-1)^j c_j \varphi^{j+1}$$

显然, 在 $c_j \neq 0$ 的前提下 ($j = 2n + 1, n = 0, 1, 2, \dots$), 当 $\varphi \neq 0$, 即弹性体在平衡位置以外的任一位置, 恒有 $M \neq -M'$ 。即扭转弹性体的恢复力矩与坐标系的选择有关, 这显然是违反物理学基本规律的。

3 (2)式和(4)式的比较

从以上的讨论可知, 对于扭转弹性体, 要满足弹性恢复力矩与坐标系选择无关, 就要求扭转弹性系数 $c(\varphi)$ 是 φ 的偶函数。一般地, 对于 φ 的偶函数 $c(\varphi)$, 可以用级数形式写成

$$c(\varphi) = \sum_{j=0}^{\infty} c_j |\varphi|^j, \quad (j = 0, 1, 2, \dots) \quad (7)$$

或
$$c(\varphi) = \sum_{j=0}^{\infty} c_{2j} \varphi^{2j}, \quad (j = 0, 1, 2, \dots)$$

在(7)式略去高于 $|\varphi|$ 的项, 就得到(2)式。

(2)式和(4)式的区别在于, (2)式认为弹性体扭转弹性系数的非线性部分主要与 φ 的一次幂有关, 而(4)式则认为主要与 φ 的二次幂有关。在小角度扭转振动时, 二者区别不大。考虑到当 $c_1 \neq 0$ 时, (2)式表示的函数在 $\varphi = 0$ 处不可导, 为计算方便, 在讨论小角度扭转振动时, 往往采用(4)式。而[1]文讨论的是大角度扭转, 本文作者认为采用(2)式较为合理。

[2]文中还认为, 本文作者在[1]文中提出的预应力补偿法消除非线性影响难以实现, 为此[2]文中列举了两个原因。其实这通过简单的技术措施便可解决。例如把支承机构和扭转弹性体分别用2个元件实现便是一种可能的技术途径。况且扭转弹性体也不只有弹性吊丝一种形式, 比如用弹性材料盘绕成的游丝也是一种可能的形式。用宝石轴承支承的摆轮-游丝系统就可以用预加应力的两个游丝去消除游丝的非线性效应。可以预言, 这种方法在仪器仪表制造业中将有着广泛的应用前景。

感谢暨南大学数力系何志强副教授在本文写作过程中给予的帮助。

参 考 文 献

- 1 唐孟希. 物理学报, 1990, 38: 170
- 2 管同仁, 胡恩科. 中山大学学报(自然科学版), 1991, 30(3):108
- 3 管同仁, 胡恩科. 天文学报, 1991, 32:1
- 4 冯登泰. 应用非线性振动力学. 北京: 中国铁道出版社, 1982. 53

Discussion on Expression of Elastic Coefficient for Non-linear Torsional Elastic Body

Tang Mengxi*

Abstract The three-differently presented elastic coefficient expressions for a non-linear torsional elastic body are compared. It is proved based on fundamental physics principles that the expressions must be an even function of torsional angle.

Keywords torsional elastic body, non-linear

· 简 讯 ·

国际教育界的创举 ——东西方大学校长聚会香港

为纪念我校老校长而设立的香港许崇清教育基金会,开拓面向世界的工作,发起并赞助“大学在知识融汇与科技转移上的使命”研讨会,邀请国内外大学校长共商良策。

会议于12月7日至9日在香港举行,参加的校长分别来自中国大陆、香港及欧美,共60多人。他们代表清华大学、中国科技大学、南京大学、西安交通大学、厦门大学等30多所国内大学,香港7所大学的校长以及美国加州大学(伯克利)、匹兹堡大学,英国皇家医学与科技学院,加拿大多伦多大学、滑铁卢大学等的校长,还有英国与德国两个基金会代表都参加了会议。我校出席的代表是曾汉民校长和许锡挥教授。

3天的研讨会,由香港大学、香港浸会学院、香港中文大学轮流担当主办单位。讨论的主题有:①大学面对知识融汇的挑战;②大学在科技发展方面扮演的角色;③大学朝多元发展以迎接90年代的社会需要。香港许崇清教育基金会主席杨乃舜在开幕词中说:“今次会议深具独特性,无论从研讨的课题上,以至参加者的不同文化和地区的背景上来看,都可说是同类会议的首次。”会上,来自东方和西方的大学校长各抒己见,气氛热烈,他们从社会经济、科技、文化发展的角度,对大学教育面临的问题,广泛交换了意见。中国科学院院长周光召和中国科协主席朱光亚也在会上发了言。

与会者一致认为,全球大学之间相互合作的前景是广阔的。大会授权香港许崇清教育基金会主席杨乃舜和副主席许锡挥组成工作小组,负责策划下一阶段活动,类似的研讨会今后将在国内外各地轮流举行。

(进之)

* Department of Physics, Zhongshan University