第31卷 第2期 中山大学学报（自然科学版） Vol.31 №.2
1992年 ACTA SCIENTIARUM NATURALIUM UNIVERSITATIS SUNYATSENI 1992

多目标决策问题的交互式保守最优方法

岑成德
（管理学院）

摘　要　对多目标决策问题提出了交互式保守最优方法，并给出了数字例子。本方法具有对决策者所提问题很简单，以及能自动保持前后一致等特点。

关键词　多目标决策问题，交互式方法，保守最优解

在多目标决策问题的研究中所提出的一类交互式方法，是决策者与分析者的一个对话过程，这类方法力图充分反映决策者的意愿，利用决策者的宝贵经验及其提供的信息来进行决策。但现有的不少交互式方法往往需要提出一些常使决策者感到困难的问题。本文提出一种交互式保守最优方法，该方法要求决策者回答的是容易回答的问题。

1　作为方法基础的定理

这一交互式方法的提出，要用到"起点型保守最优解"的概念[1]。

考虑多目标决策问题Q。

$$Q:\quad \begin{cases} \max f(x) = (f_1(x), f_2(x), \cdots, f_m(x))^T, & m \geqslant 2 \\ s.t.\quad x \in X \end{cases}$$

其中$X \subset R^n$为有界闭集，$f_i(x)$　$(i=1,2,\cdots,m)$是X上的连续函数。

设$q=(q_1,q_2,\cdots,q_m)^T=f(x^0)$，$x^0 \in X$。

显然，以q为起点的保守最优解y满足

$$f(y) \geqslant f(x^0) \tag{1}$$

因为若某$f_i(y) < f_i(x^0)$，则$\xi(h(y)) < \xi(h(x^0))$[1]。

定理1　假设在多目标决策问题Q中，X为凸集，$f_i(x)$为凹函数$(i=1,2,\cdots,m)$。设$B_q(Q)$为以q为起点的保守最优解集，$y \in B_q(Q)$。将$(f(y)-q)$中的分量依从小到大的次序排列并以此为依据将$f_i(\cdot)(i=1,2,\cdots,m)$分为$l$组：

$$f_{s_1},\ f_{s_2},\ \cdots,\ f_{s_{k_1}};$$

$$f_{s_{k_1+1}},\ f_{s_{k_1+2}},\ \cdots,\ f_{s_{k_2}};$$

$$\vdots$$

$$f_{s_{k_{l-1}+1}},\ \cdots,\ f_{s_{k_l}}.$$

本文1990年9月14日收到

使这一分组满足：i）对$k_{i-1}+1\leqslant k\leqslant k_i$，$f_{s_k}(y)-q_{s_k}=d_i$，$d_i$为常数，$i=1,2,\cdots,l$.（规定$k_0=0$）；ii）$d_l>d_{l-1}>\cdots>d_1\geqslant 0$；iii）$k_l=m$；若$k\neq h$，则$s_k\neq s_h$.

如果存在$x\epsilon X$，使对某$k_{i-1}+1\leqslant k\leqslant k_i$，有

$$f_{s_k}(x)>f_{s_k}(y) \tag{2}$$

则必存在$j\leqslant k_i$，使得

$$f_{s_j}(x)<f_{s_j}(y) \tag{3}$$

证明 由$B_q(Q)$中各解对应的目标值的唯一性[1]，知对任何$y\epsilon B_q(Q)$，定理中的分组都是相同的。

假设(3)式不成立，则$f_{s_j}(x)\geqslant f_{s_j}(y)$，当$j\leqslant k_i$.

令 $$x(\lambda)=\lambda x+(1-\lambda)y,\ (0<\lambda<1).$$

则 $$f_{s_j}(x(\lambda))=f_{s_j}(\lambda x+(1-\lambda)y)\geqslant\lambda f_{s_j}(x)+(1-\lambda)f_{s_j}(y)\geqslant f_{s_j}(y),\ \text{当} j\leqslant k_i,$$

且 $$f_{s_k}(x(\lambda))\geqslant\lambda f_{s_k}(x)+(1-\lambda)f_{s_k}(y)>f_{s_k}(y).$$

又由于当$h>i$时$d_h>d_i$，故只要λ足够小，则必有

$$f_{s_j}(x(\lambda))-q_{s_j}\geqslant[\lambda f_{s_j}(x)+(1-\lambda)f_{s_j}(y)]-q_{s_j}>d_i,\ \text{当} j\geqslant k_i+1.$$

所以，当λ足够小时，$\xi[f(y)-q]<\xi[f(x(\lambda))-q]$，这与$y\epsilon B_q(Q)$矛盾。

2 交互式方法

对多目标决策问题Q提出这一方法。下面假设问题Q满足定理1中的条件。

第0步 决策者给出一个起点$f^0=\left(f_1^0,f_2^0,\cdots,f_m^0\right)^T$（在实用上，这一起点只要满足：存在$x^0$，使$f(x^0)\geqslant f^0$）.

令 $t=0$，$I_0=\{1,2,\cdots,m\}$，$X_0=X$，$f^*=\left(f_1^*,f_2^*,\cdots,f_m^*\right)^T=f^0$.

第1步 以 $f_i^*(i\epsilon I_t)$为起点求解问题Q_t的起点型保守最优解。

$$Q_t:\ \begin{cases}\max\{f_i(x),i\epsilon I_t\}\\ \quad s.t.\quad x\epsilon X_t\end{cases}$$

记其解为x_t（由于各解的目标值相同，故只须取解集中任一解即可）.

如果对所有$i\epsilon I_t$，$f_i(x_t)=f_i(x_{t-1})$，由决策者决定是否重作划分（“划分”的含义见第3步）。若不再重作划分，执行第5步；若重作划分，令$t=t-1$，决策者在第3步重作划分时须异于上一次的划分。

第2步 以$f(x_t)-f^*$为依据，按定理1中的分组方法将$f_i(\cdot)(i\epsilon I_t)$分组（其中$k_l=k_l(t)=I_t$的元素个数）.

第3步 决策者选择需要提高的目标与不能再降低的目标。使决策者在“若提高第h组中某目标，则不能保持第1至h组中所有目标不降低”的前提下选择。选择的结果将I_t划分为3部分：

A_t：当$i\epsilon A_t$，$f_i(x_t)$需要提高；

B_t：当$i\epsilon B_t$，$f_i(x_t)$不能降低；

C_t：当$i\in C_t$，$f_i(x_t)$可以降低。

简称这一过程为一次“划分”。

若$A_t=\phi$，执行第 5 步。

第 4 步　令$t=t+1$，

$$X_t=\{x\in X_{t-1}|f_i(x)\geqslant f_i(x_{t-1}),\ i\in B_{t-1}\},$$
$$I_t=I_{t-1}-B_{t-1},$$
$$f_i^*=f_i(x_{t-1}),\ i\in A_{t-1}.$$

返回第 1 步。

第 5 步　若x_t是问题Q_t的唯一保守最优解，结束。否则，以$f(x_t)$为起点，求问题Q的起点型保守最优解，结束。

为了保证算法能在某一步之后停止，决策者可事先给出一个正数ε，求解时认为小于ε的差别是可以忽略的。这时只要理想点存在，则必然可在有限步内结束决策过程。

可以看到，这一交互式方法除了有对决策者所提问题很简单的特点之外，还有一个特点是我们通过算法本身的机制，使得无论决策者的各次划分如何，都能自动保持决策过程前后的一致性。当决策者在提高一目标之后再使该目标可降低，运算的结果总保持这一目标最低不会降到决策者尚希望提高时的水平之下。另外，这一方法将决策者认为需要保持不降的目标化为约束（并且在之后的各步也都只作为约束），这就减少了目标数，从而降低了决策者作选择的难度，便于决策者更集中地考虑余下的目标。而且，这也将使计算量减少。

3　数值例子

例 1　设 $f_1(x)=3x_1+3x_2-x_3+5x_4+6x_5$，$f_2(x)=-x_1+x_2+5x_3+2x_4+x_5$

$f_3(x)=2x_1+x_2+3x_3+3x_4+x_5$，$f_4(x)=8x_1+4x_2+8x_3+9.6x_4+4x_5$

求

$$\begin{cases}\max(f_1(x),f_2(x),f_3(x),f_4(x))^T\\ \text{s.t.}\quad 2x_1+2x_2+3x_3+6x_4+x_5\leqslant 60\\ \qquad x_1-x_2+2x_4+2x_5\leqslant 40\\ \qquad 7x_1+x_3-2x_4+3x_5\leqslant 80\\ \qquad x_1+3x_2+11x_3+x_5\leqslant 140\\ \qquad x_1,x_2,x_3,x_4,x_5\geqslant 0\end{cases}\tag{4}$$

先求出各目标分别所能达到的最大值，提供给决策者作为参考：$M_1=210$，$M_2=76.55172$，$M_3=57.69231$，$M_4=185.6$。

决策者选定的起点为$f^0=(140,66,50,175)^T$。

以f^0为起点求得保守最优解为：

$x_1=0.3715854$　　$f_1=144.4918$

$x_2=5.508197$　　$f_2=70.4918$

$x_3=8.557376$　　$f_3=54.4918$

$x_4=0$ $f_4=183.7377$

$x_5=22.56831$

分组为：f_1，f_2，$f_3|f_4$

决策者选择：提高f_1、f_2，保持f_4不降，f_3可降低。

在原约束上增加约束 $f_4(x)\geqslant183.7377$.以$(144.4918，70.4818，50)^T$为起点求保守最优解(这时是3个目标的问题)．所得结果与上一步结果一样．即决策者的这一愿望不能实现．

决策者重作选择：提高f_1,f_2，其余可降低．

以$(144.4918，70.4918，50，175)^T$为起点，求得：

$x_1=0$ $f_1=145.5088$

$x_2=5.684212$ $f_2=71.50877$

$x_3=8.59649$ $f_3=54.31579$

$x_4=0$ $f_4=182.8772$

$x_5=22.84211$

分组为：f_1，$f_2|f_3|f_4$

决策者选择：提高f_3，保持f_2、f_4不降，f_1可降低．

在约束条件上增加 $f_2(x)\geqslant71.50877$,$f_4(x)\geqslant182.8772$．以$(144.4918，54.31579^T)$为起点，求得：

$x_1=9.039517E-02$ $f_1=144.6274$

$x_2=5.548615$ $f_2=71.50878$

$x_3=8.664289$ $f_3=54.45139$

$x_4=0$ $f_4=183.1484$

$x_5=22.72911$

分组为：f_1，f_3(同一组)

决策者选择：不再提高f_1或f_3．

上一步的解是唯一解．结束．

参 考 文 献

1 岑成德．系统工程理论与实践，1990，10(5)：49～54

2 Evren R. Journal of the Operational Research Society, 1987, 38: 163～172

3 Zeleny M. Compromise Programming. In: J L Cochrance and Zeleny M eds. Multiple Criteria Decision Making, Columbia: Univ. of South Carolina Press, 1973, 262～301

The Interactive Conservative Optimal Method for Multicriteria Decision Making

*Cen Chengde**

Abstract An interactive approach for multicriteria decision making is presented and a numerical example is given to illustrate the approach. The interactive conservative optimal method has several advantages. The decision maker needs only answering some simple questions, and the method can maintain the consistency of every step in the process automatically.

Keywords multicriteria decision making, interactive approach, conservative optimal solution

* School of Management