

个别时变步长LMS自适应算法

陈钧量 唐予南

(无线电电子学系)

摘要 本文提出一种步长自适应于输入信号与预测误差相关的个别时变步长最小均方 (IVLMS) 自适应算法。给出步长的物理解释, 导出算法的收敛条件、权二阶矩矩阵差分方程和稳态失调量。将个别时变步长的思想应用于归一化LMS算法和分块LMS算法, 均获得良好效果。

关键词 个别时变步长矩阵, LMS自适应算法, 权二阶矩, 权噪声功率

自适应滤波器具有跟踪时变输入统计能力的突出优点, 可用于通信、控制、雷达、地震学、图象处理和模式识别等领域。Widrow-Hoff LMS自适应算法, 因其简单性和在某些应用中的顽健性, 近十多年来得到广泛采用^[1]。但这种固定步长LMS算法, 在性能方面存在着收敛速度与稳态失调量的矛盾。近几年来, 人们提出了多种可变步长LMS算法^[2~4]。本文基于维纳滤波器中误差信号与输入信号正交性原理, 提出一种步长自适应于权误差均值的个别时变步长最小均方 (IVLMS) 算法。

1 个别时变步长LMS自适应算法

图1为系统模拟框图, 在*i*时刻模拟系统的预测误差*e(i)*为

$$e(i) = d(i) - W^T(i)X(i) = n(i) - V^T(i)X(i) \tag{1}$$

其中,

$$X(i) = [x(i), x(i-1), \dots, x(i-N+1)]^T$$

$$W(i) = [w_0(i), w_1(i), \dots, w_{N-1}(i)]^T$$

$$V(i) = W(i) - W^*$$

$$W^* = [w_0^*, w_1^*, \dots, w_{N-1}^*]^T$$

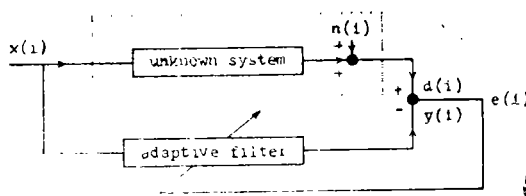


图1 自适应仿模系统框图

Fig.1 Adaptive modelling system

本文1991年8月29日收到

梯度搜索法的权向量迭代公式为

$$W(i+1) = W(i) - \mu \nabla_i \quad (2)$$

式中 μ 为步长常数, ∇_i 为误差函数的梯度。在一般LMS自适应算法中有^[1]

$$W(i+1) = W(i) + 2\mu e(i)X(i) \quad (3)$$

式(3)收敛的充分条件为

$$0 < \mu < 1/\text{tr}[R_{xx}(i)] \quad (4)$$

其中, $R_{xx}(i) = E[X(i)X^T(i)]$, $\text{tr}[\cdot]$ 为 \cdot 的迹。设 μ 足够小, 则稳态失调量为^[1]

$$M = \mu \cdot \text{tr}[R_{xx}] \quad (5)$$

本文将步长因子 μ 用时变步长矩阵 $M(i)$ 表示, 式(3)变为

$$W(i+1) = W(i) + 2kM(i)e(i)X(i) \quad (6)$$

式中 k 为常数, 用来保证算法收敛。 $M(i)$ 定义如下

$$M(i) = \text{diag}[\mu_0(i), \mu_1(i), \dots, \mu_{N-1}(i)] \quad (7)$$

其中 $\mu_j(i)$ 取下式

$$\mu_j(i) = \left| \sum_{l=0}^{m-1} e(i-l)x(i-j-l) \right|, \quad j = 0, 1, \dots, N-1 \quad (8)$$

式中 m 为参数, 它将影响算法的收敛性能, 其值可按具体应用来选择。

下面, 对式(8)作必要的解释。假设: ① $n(i)$ 与 $x(i)$ 不相关, 和 $\sum_{l=0}^{m-1} n(i-l)x(i-j-l) \approx 0$, ②各 $x(i)$ 互不相关, 则 $x(i)$ 与 $v(i)$ 也不相关。

将式(1)代入(8), 并计及假设①和②得

$$\begin{aligned} \mu_j(i) &= \left| \sum_{l=0}^{m-1} [n(i-l) - V^T(i-l)X(i-l)]x(i-j-l) \right| \\ &= \left| \sum_{l=0}^{m-1} V^T(i-l) \cdot \sum_{l=0}^{m-1} x(i-l-j)x(i-j-l) \right| \\ &= m^2 \sigma_x^2 \left| \frac{1}{m} \sum_{l=0}^{m-1} v_j(i-l) \right| \end{aligned} \quad (9)$$

其中 σ_x^2 是均值为零的输入信号方差。式(9)具有明显的物理意义, 第 j 个步长因子 $\mu_j(i)$ 与第 j 个权误差均值的绝对值成正比, 即每个权根据其误差均值绝对值大小个别进行迭代运算。此外, 迭代运算初期, $\mu_j(i)$ 数值较大, 加快收敛。当接近稳态或达到稳态时, 权误差均值绝对值较小, 即 $\mu_j(i)$ 也较小, 从而保证更小的稳态失调量。可见, 由式(9)说明了式(8)的合理性。

1.1 收敛条件

由式(1)和(6)可得

$$\begin{aligned} V(i+1) &= V(i) + 2kM(i)e(i)X(i) \\ &= V(i) + 2kM(i)[n(i) - X^T(i)V(i)]X(i) \end{aligned} \quad (10)$$

对上式取期望, 并考虑假设①得

$$E[V(i+1)] = [I - 2k\bar{M}(i)R_{xx}]E[V(i)] \quad (11)$$

式中, I 为单位矩阵, $\bar{M}(i) = E[M(i)]$

设 Q 为使 $\bar{M}(i)R_{xx}$ 对角化的正交化矩阵, 用 Q 前乘式(11)可得

$$E[V'(i+1)] = [I - 2k\Lambda]^{i+1}E[V'(0)] \quad (12)$$

式中, $V'(i+1) = QV(i+1)$,

$$\Lambda = Q[\bar{M}(i)R_{xx}]Q^T = \text{diag}[\lambda_1, \lambda_2, \dots, \lambda_N]$$

由此得收敛条件

$$0 < k < 1/\lambda_i, \quad i = 1, 2, \dots, N$$

$$\text{即} \quad 0 < k < 1/\lambda_{\max} \quad (13)$$

式中 λ_{\max} 为对角矩阵 Λ 的元素最大值。利用 $\text{tr}[\bar{M}(i)R_{xx}] = \sum_{i=1}^N \lambda_i > \lambda_{\max}$, 则收敛的充分条件为

$$0 < k < 1/\text{tr}[\bar{M}(i)R_{xx}] \quad (14)$$

由假设②, 式(14)可写为

$$0 < k < 1/\sigma_x^2 \text{tr}[\bar{M}(i)] \quad (15)$$

1.2 权二阶矩矩阵差分方程

权二阶矩定义为

$$\Delta(i) = E[V(i)V^T(i)] = E\{[W(i) - W^*][W(i) - W^*]^T\} \quad (16)$$

由式(10)我们得

$$\begin{aligned} V(i+1)V^T(i+1) = & \{V(i) + 2kM(i)[n(i) - X^T(i)V(i)]X(i)\} \\ & \cdot \{V(i) + 2kM(i)[n(i) - X^T(i)V(i)]X(i)\}^T \end{aligned} \quad (17)$$

展开上式并两边取集合平均, 利用假设①, 则可得

$$\begin{aligned} \Delta(i+1) = & \Delta(i) - 2k\bar{M}(i)R_{xx}\Delta(i) - 2k\Delta(i)R_{xx}\bar{M}(i) \\ & + 4k^2\bar{M}(i)E\{n^2(i) + [X^T(i)V(i)]^2\}R_{xx}\bar{M}(i) \end{aligned} \quad (18)$$

将均方误差 $\zeta(i) = E\{n^2(i) + [X^T(i)V(i)]^2\}$ 代入上式最后一项得

$$\Delta(i+1) = \Delta(i) - 2k\bar{M}(i)R_{xx}\Delta(i) - 2k\Delta(i)R_{xx}\bar{M}(i) + 4k^2\zeta(i)R_{xx}\bar{M}(i) \quad (19)$$

式(19)为权二阶矩矩阵差分方程, 描述了收敛过程的均方动态特性。据此, 可导出其收敛条件。将式(19)改写为

$$\begin{aligned} \Delta(i+1) = & [I/2 - 2k\bar{M}(i)R_{xx}]\Delta(i) + \Delta(i)[I/2 - 2kR_{xx}\bar{M}(i)] \\ & + 4k^2\zeta(i)\bar{M}(i)R_{xx}\bar{M}(i) \end{aligned} \quad (20)$$

因 $k \ll 1$, 上式中含 k^2 项在收敛时可忽略, 从而得到上式收敛的一个充份条件

$$-I/2 < I/2 - 2kR_{xx}\bar{M}(i) < I/2 \quad (21a)$$

$$-I/2 < I/2 - 2k\bar{M}(i)R_{xx} < I/2 \quad (21b)$$

由式(21)得收敛充份条件为

$$0 < k < 1/2\text{tr}[R_{xx}\overline{M}(i)] \quad (22)$$

由假设②, 式(22)可写为

$$0 < k < 1/2\sigma_x^2 \text{tr}[\overline{M}(i)] \quad (23)$$

这一条件和式(15)相一致, 仅差一常数因子1/2.

1.3 稳态失调量

在式(19)中, 令 $i \rightarrow \infty$, 并且满足式(23), 自适应过程将收敛到稳态. 定义 $\Delta(\infty) = \lim_{i \rightarrow \infty} \Delta(i)$, 则得

$$\Delta(\infty) = k\zeta(\infty)\overline{M}(\infty) \quad (24)$$

其中, 稳态均方误差 $\zeta(\infty) = \zeta_{\min} + \sigma_x^2 \text{tr}[\Delta(\infty)]$, 最小均方误差 $\zeta_{\min} = E[n^2(i)]$

由式(24)可得

$$\text{tr}[\Delta(\infty)] = k\zeta_{\min} \text{tr}[\overline{M}(\infty)] / \{1 - k\sigma_x^2 \text{tr}[\overline{M}(\infty)]\} \quad (25)$$

由此得到IVLMS算法的失调量

$$M = \frac{\zeta_{\text{excess}}}{\zeta_{\min}} = \frac{\sigma_x^2 \cdot \text{tr}[\Delta(\infty)]}{\zeta_{\min}} = \frac{k\sigma_x^2 \cdot \text{tr}[\overline{M}(\infty)]}{1 - k\sigma_x^2 \cdot \text{tr}[\overline{M}(\infty)]} \quad (26)$$

为说明式(26)的有效性, 在式(6)中, 用 μ 代替 k , 用单位矩阵 I 代替 $M(i)$, 则得到LMS算法的权迭代式(3). 同样, 在式(26)中, 用 μ 和 I 分别代替 k 和 $M(i)$, 可得LMS算法的失调量

$$M = \frac{\mu\sigma_x^2 \text{tr}[I]}{1 - \mu\sigma_x^2 \text{tr}[I]} = \frac{\mu\sigma_x^2 N}{1 - \mu\sigma_x^2 N} = \frac{\mu \text{tr}[R_{xx}]}{1 - \mu \cdot \text{tr}[R_{xx}]} \approx \mu \cdot \text{tr}[R_{xx}] \quad (27)$$

可见, 式(27)与式(5)是一致的.

1.4 计算量

由式(8)可得

$$\begin{aligned} k\mu_j(i+1) &= k \left| \sum_{l=0}^{m-1} e(i+1-l)x(i+1-j-l) \right| \\ &= k \left| \sum_{l=0}^{m-1} e(i-l)x(i-j-l) + e(i+1)x(i+1-j) \right. \\ &\quad \left. - e(i-m+1)x(i-j-m+1) \right|, \quad j=0, 1, \dots, N-1 \quad (28) \end{aligned}$$

式(28)右边绝对值中第一项是 $\mu_j(i)$ 的数值, 不增加计算量. 因此, 求 $\mu_j(i+1)$ 时只增加两次加法和一次乘法. 对于 N 个权的自适应滤波器, IVLMS与LMS相比, 每次迭代要增加 N 次乘法和 $2N$ 次加法.

2 个别时变步长NLMS和BLMS算法

2.1 个别时变步长NLMS算法

为了平滑 LMS 算法的稳态性能, 由 LMS 算法派生出固定步长归一化最小均方 (NLMS) 算法, 该算法的权矢量迭代式为^[6]

$$W(i+1) = W(i) + [2\mu/X^T(i)X(i)]e(i)X(i), \quad 0 < \mu < 1 \quad (29)$$

在式(29)中, 用 $M(i)$ 代替 μ , 提出个别时变步长归一化 LMS (IVNLMS) 算法, 其权矢量迭代公式如下:

$$W(i+1) = W(i) + 2kM(i)[e(i)X(i)/X^T(i)X(i)] \quad (30)$$

式中, k 为较小常数, $M(i)$ 及 $\mu_j(i)$ 分别与式(7)和(8)相同。为了减少计算量, 对式(30)中 $X^T(i)X(i)$ 项进行迭代运算。

$$\begin{aligned} X^T(i+1)X(i+1) &= x^2(i+1) + x^2(i) + \dots + x^2(i+1-N+1) \\ &= x^2(i+1) + x^2(i) + \dots + x^2(i+1-N+1) + x^2(i+1-N) \\ &\quad - x^2(i+1-N) \\ &= X^T(i)X(i) + x^2(i+1) - x^2(i+1-N) \end{aligned} \quad (31)$$

2.2 个别时变步长BLMS算法

为快速实现 LMS 算法, Clark 等提出固定步长分块最小均方 (BLMS) 自适应算法^[6], 它对输入信号作成批处理, 权矢量在每一数据块中更新一次。其权矢量迭代公式为

$$W_{j+1} = W_j + (2\mu_B/L)\mathcal{X}_j^T \bar{e}_j \quad (32)$$

式中, μ_B 是分块步长因子 (亦称分块收敛常数), W_j 是在第 j 块数据时 $N \times 1$ 权矢量。

$\mathcal{X}_j \triangleq [X_{(j-1)L+1}, X_{(j-1)L+2}, \dots, X_{jL}]^T$ 为第 j 块 $L \times N$ 输入矢量矩阵。 $X_k \triangleq [x_k, x_{k-1}, \dots, x_{k-N+1}]^T$ 为输入矢量。 $\bar{e}_j = [e_{(j-1)L+1}, e_{(j-1)L+2}, \dots, e_{jL}]^T$ 为第 j 块 $L \times 1$ 误差矢量, 而 $e_k \triangleq d_k - y_k$, 其中 d_k 为未知系统的期望输出, y_k 为自适应滤波器输出。 L 为输入数据分块长度, N 为自适应滤波器权数。

在式(32)中, 用 $KM(i)$ 代替 μ_B , 其中 K 为较小常数, 用来保证算法收敛。由此提出个别时变步长 BLMS (IVBLMS) 算法如下:

$$\begin{aligned} W_{j+1} &= W_j + (2/L)KM(j)\mathcal{X}_j^T \bar{e}_j = W_j + (2/L)KM(j) \sum_{k=(j-1)L+1}^{jL} e_k X_k \\ &= W_j + (2/L)KM(j)\Phi_j \end{aligned} \quad (33)$$

考虑矢量 Φ_j 的第 i 个元素

$$\phi_{ij} = \sum_{k=(j-1)L+1}^{jL} e_k x_{k-i+1}, \quad i = 1, 2, \dots, N$$

令 $n = k - i + 1$, 上式写为

$$\phi_{ij} = \sum_{n=(j-1)L-i+2}^{jL-i+1} e_{n+i-1}x_n = e_{-i} * x_i, \quad i = 1, 2, \dots, N \quad (34)$$

显然, 权矢量更新项为一相关运算, 可利用并行处理器或串行处理器和FFT成块处理。

在式(33)中 $M(j)$ 为

$$M(j) = \text{diag}[\mu_1(j), \mu_2(j), \dots, \mu_N(j)] \quad (35)$$

其中 $\mu_i(j)$ 取值如下:

$$\mu_i(j) = \left| \sum_{l=0}^{m-1} \phi_{i,j-l} \right|, \quad i = 1, 2, \dots, N \quad (36)$$

3 计算机模拟结果

3.1 IVLMS算法仿真

模拟实验装置采用图1的自适应仿模系统, 未知系统采用9个权的固定参数FIR横向滤波器。

(1) 输入为平稳正弦信号, 周期为20, 噪声为零均值的高斯白噪声, 信噪比为10dB。LMS算法 $\mu=0.004$, IVLMS算法 $k=0.0025, m=5$ 。图2给出LMS算法和IVLMS算法的权噪声功率学习曲线, 图中为5根曲线取平均的结果。

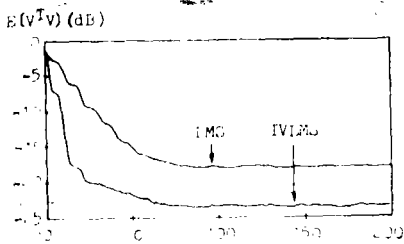


图2 平稳输入条件下LMS算法和IVLMS算法的权噪声功率学习曲线

Fig.2 Curves of weight noise power in stationary input

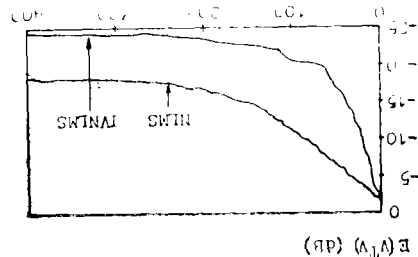


图3 非平稳输入条件下LMS算法和IVLMS算法的权噪声功率学习曲线

Fig.3 Curves of weight noise power in nonstationary input

(2) 输入为非平稳的窄带信号, 采样频率为1 Hz, 主频0.05Hz, 即 $T=20$, 窄带非平稳信号为 $x(i) = \sin[i(2\pi/T) + (2\pi/200) \cdot \text{Mod}(i/T)] +$ 随机噪声^[7]。其中 i 是时间序数, 由 $\text{Mod}(\cdot)$ 产生 i/T 的余数函数, 输入信号中噪声项为 $[-0.5, 0.5]$ 区间分布的均匀白噪声, 未知系统噪声功率为0.2的高斯白噪声。LMS算法 $\mu=0.006$, IVLMS算法 $k=0.0035, m=5$ 。图3为5根曲线取平均的权噪声功率学习曲线。

(3) 对时变系统的跟踪特性。仍采用图1实验装置, 未知系统为时变系统, 非平稳模型为:

$$d(n) = x(n) + 0.1x(n-1) \quad n < 200$$

$$d(n) = (1/2)x(n) + 0.1x(n-1) \quad n \geq 200$$

输入信号为随机的二进制比特流，噪声为高斯白噪声，信噪比为 20dB，LMS 算法 $\mu = 0.08$ ，IVLMS算法 $k = 0.05$ ， $m = 5$ 。采用权 ω_0 的跟踪曲线。图 4 给出两种算法的跟踪曲线。

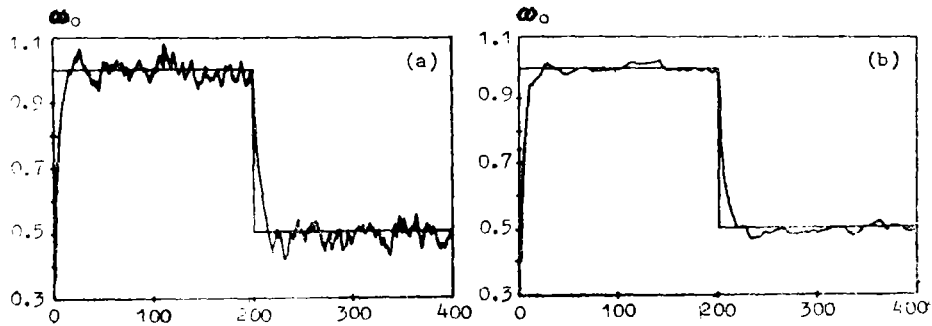


图4 LMS算法和IVLMS算法的权 ω_0 跟踪曲线
Fig.4 Weight ω_0 tracking curve for (a) LMS and (b) IVLMS
(a) LMS算法, (b) IVLMS算法

3.2 IVNLMS算法仿真

实验装置见图 1，未知系统为 9 阶固定参数 FIR 横向滤波器，输入为正弦信号，噪声为高斯白噪声，信噪比为 10dB，NLMS 算法中 μ 取 0.02，IVNLMS 算法中 k 取 0.006 和 m 取 12。图 5 给出两种算法的单样本权噪声功率学习曲线。

3.3 IVBLMS算法仿真

实验条件与 3.2 节相同，信噪比为 20dB，BLMS 中 $\mu_B = 0.008$ ，IVBLMS 中 $k = 0.05$ 和 $m = 5$ 。图 6 给出两种算法用 5 根曲线取平均的权噪声功率学习曲线。

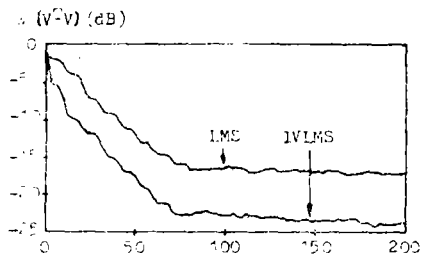


图5 平稳输入条件下NLMS算法和IVNLMS算法的单样本权噪声功率学习曲线
Fig.5 Curves of weight noise power in stationary input

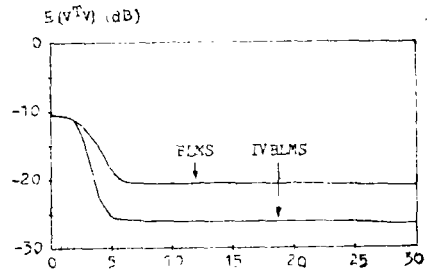


图6 平稳输入条件下BLMS算法和IVBLMS算法的权噪声功率学习曲线
Fig.6 Curves of weight noise power in stationary input

4 结 论

本文提出一种步长自适应于权误差均值的个别时变步长最小均方(IVLMS)算法,对新算法的收敛性能作了定量分析,讨论了其计算量。新算法具有初始阶段和未知系统时变阶段步长自动增大,接近稳态时步长自动减小的特点。与LMS算法相比较,IVLMS算法在同样的收敛速度或跟踪速度下能获得更小的稳态误差。同时,提出IVNLMS和IVBLMS算法,计算机模拟表明均有更小的稳态权噪声功率。

参 考 文 献

- 1 Widrow B, Stearns S D. Adaptive Signal Processing, Prentice-Hall, 1985
- 2 Harris R W, Chabries D M, Bishop F A. IEEE Trans ASSP, 1986, 34:309
- 3 Mikhael W B, Wu F H, Kazovsky L G *et al.* IEEE Trans CAS, 1986, 33:677
- 4 陈钧量, 中山大学学报(自然科学版), 1991, 30(2):69
- 5 Bershad N J. IEEE Trans ASSP, 1986, 34:793
- 6 Clark G A, Mitra S K, Parker S R. IEEE Trans ASSP, 1981, 29:744
- 7 Chen J, Vandewalle J. Proceedings of 1988 IEEE ISCAS, 771

An Individual Variable Step LMS Adaptive Algorithm

Chen Junliang Tang Yunan*

Abstract An individual variable step LMS adaptive algorithm which varies its step size adaptively to the correlation between the input signal and prediction error is proposed. A physical explanation of the step size is presented. The condition of convergence, a matrix difference equation for the second moment of the weight and the misadjustment of the IVLMS algorithm are derived. The noise power of the adaptive weights and the tracking capability of the new algorithm are evidently superior to the conventional LMS algorithm both in stationary and nonstationary inputs. It is shown that the concept of individual variable step size is also available to the normalized LMS and block LMS adaptive algorithms.

Keywords individual variable step matrix, LMS adaptive algorithm, second moment of the weight, weight noise power

* Department of Radio and Electronics