第30卷 第4期 1991年
中山大学学报(自然科学版)
ACTA SCIENTIARUM NATURALIUM UNIVERSITATIS SUNYATSENI
Vol.30 №.4 1991

对角形拟线性椭圆组的特征值问题

陈 婕 陈宝耀
(广东省经济管理干部学院) (中山大学数学系)

摘 要

给出对角形拟线性椭圆组Dirichlet问题解的一个积分恒等式，并证明这一类对角形半线性椭圆组特征值分布成一区间$(0,\Lambda_1)$。

关键词 对角形，拟线性椭圆组，特征值问题

1 引 言

设$\Omega\subset\mathbf{R}^n$是充分光滑的有界域，$n\geqslant 3$，它的边界记作$\partial\Omega$。用$\nu$表示外法向量。Pohozaev给出边值问题

$$\begin{cases} -\Delta u=f(u) & \text{在}\Omega\text{中} \\ u|_{\partial\Omega}=0 \end{cases}$$

解的一个积分恒等式[1]

$$n\int_\Omega F(u)\mathrm{d}x+\frac{2-n}{2}\int_\Omega uf(u)\mathrm{d}x=\frac{1}{2}\int_{\partial\Omega}(x\cdot\nu)|\Delta u|^2\mathrm{d}x$$

其中 $F(u)=\int_0^u f(t)\mathrm{d}x$， $F(0)=0$

并给出一个反例，即证明边值问题

$$\begin{cases} -\Delta u=u^p & \text{在}\Omega\text{中} \quad p=(n+2)/(n-2) \\ u>0 & \text{在}\Omega\text{中} \\ u|_{\partial\Omega}=0 \end{cases}$$

在星形城Ω中无解。H.Brezis和L.Nirenberg[2]运用 Pohozaev 恒等式得到边值问题

$$\begin{cases} -\Delta u=u^p+\lambda u & \text{在}\Omega\text{中} \\ u>0 & \text{在}\Omega\text{中} \\ u|_{\partial\Omega}=0 \end{cases}$$

解存在的必要条件，即当$\lambda\notin(0,\Lambda_1)$时上述问题无解。这里$\Lambda_1$为$-\Delta$的最小特征值。陈宝耀[3,4]把文[2]工作推广到具多重调和算子的高阶拟线性椭圆型方程和具Laplace算子的半线性椭圆组。本文考虑对角形拟线性椭圆组的Dirichlet问题：

$$\text{(I)}\begin{cases} -D_\alpha(A^{\alpha\beta}(x,u)D_\beta u)=f(x,u) & A^{\alpha\beta}=A^{\beta\alpha}\text{在}\Omega\text{中} \\ u|_{\partial\Omega}=0 \end{cases}$$

本文1989年7月3日收到

其中　$u=(u^1,u^2,\cdots,u^N)$，　$f=(f_1,f_2,\cdots,f_N)$，　$D_\beta u=D_\beta u^1,D_\beta u^2,\cdots,D_\beta u^N)$。$N$表示未知函数及方程的个数，$n$为自变量的个数。

设存在函数$F(x,u)$使有

$$D_{u^i}F(x,u)=f_i(x,u),\quad 且F(x,0)=0 \tag{1}$$

这里$D_{u^i}F(x,u)$表示$F(x,u)$仅对u^i的偏导数。下面将证明Dirichlet问题(Ⅰ)的解u必须满足一个Pohozaev型积分恒等式

$$\begin{aligned}&n\int_\Omega F(x,u)\mathrm{d}x+\frac{2-n}{2}\int_\Omega u\cdot f(x,u)\mathrm{d}x+\int_\Omega x\cdot D_xF(x,u)\mathrm{d}x\\&=\frac{1}{2}\int_{\partial\Omega}(x\cdot\nu)A^{\alpha\beta}(x,u)D_\alpha u\cdot D_\beta u\mathrm{d}s\\&\quad+\frac{1}{2}\int_\Omega(x\cdot DA^{\alpha\beta}(x,u))D_\alpha u\cdot D_\beta u\mathrm{d}x\end{aligned} \tag{2}$$

这里关于α,β,γ的重指标表示从1至n求和，关于i,j的重指标表示从1至N求和。并运用(2)证明一些非存在性结果（见推论1～3）。最后探讨了具Sobolev嵌入临界指数的非线性椭圆组的特征值问题并获得初步结果（见定理2）。

2　积分恒等式的建立

设u是问题(Ⅰ)的解，便有

$$\int_\Omega A^{\alpha\beta}(x,u)D_\alpha uD_\beta u\mathrm{d}x=\int_\Omega u\cdot f(u)\mathrm{d}x \tag{3}$$

注意到条件(1)，应用Grecn公式得

$$\begin{aligned}0=\int_{\partial\Omega}(x\cdot\nu)F(x,u)\mathrm{d}s=n\int_\Omega E(x,u)\mathrm{d}x+\int_\Omega(x\cdot Du^i)f_i(x,u)\mathrm{d}x\\+\int_\Omega xD_xF(x,u)\mathrm{d}x\end{aligned} \tag{4}$$

其中　$Du^i=(D_1u^i,D_2u^i,\cdots,D_nu^i)$

$D_xF(x,u)=(D_{x_1}F(x,u),D_{x_2}F(x,u),\cdots,D_{x_n}F(x,u))$

$D_{x_\alpha}F(x,u)$表示$F(x,u)$仅对x_α求偏导数，而不考虑变量u。显然

$$\begin{aligned}\int_\Omega x\cdot D(A^{\alpha\beta}(x,u)D_\alpha u\cdot D_\beta u)\,\mathrm{d}x=\int_{\partial\Omega}(x\cdot\nu)A^{\alpha\beta}(x,u)D_\alpha uD_\beta u\mathrm{d}s\\-n\int_\Omega u\cdot f(x,u)\mathrm{d}x\end{aligned} \tag{5}$$

由齐次边界条件推知在$\partial\Omega$上有

$$Du^i=\pm|Du^i|\nu \tag{6}$$

$$\begin{aligned}\therefore\ \int_{\partial\Omega}(x\cdot\nu)A^{\alpha\beta}(x,u)D_\alpha uD_\beta u\mathrm{d}s&=\int_{\partial\Omega}(x\cdot Du^i)A^{\alpha\beta}(x,u)D_\alpha u^i\nu_\beta\mathrm{d}s\\&=n\int_\Omega F(x,u)\mathrm{d}x+\int_\Omega(x\cdot D_xF(x,u))\mathrm{d}x+\int_\Omega u\cdot f(u)\mathrm{d}x\\&\quad+\int_\Omega x_\gamma A^{\alpha\beta}(x,u)D_\alpha u\cdot D_{\beta\gamma}u\mathrm{d}x\end{aligned} \tag{7}$$

$\because$　$D_\gamma(A^{\alpha\beta}(x,u)D_\alpha uD_\beta u)=D_\gamma A^{\alpha\beta}(x,u)D_\alpha u\cdot D_\beta u+2A^{\alpha\beta}(x,u)D_\alpha u\cdot D_{\beta\gamma}u$，并

利用等式(5)得出

$$\int_\Omega x_r A^{\alpha\beta}(x,u)D_\alpha u\cdot D_{\beta r}u\mathrm{d}x$$

$$=\frac{1}{2}\int_{\partial\Omega}(x\cdot\nu)A^{\alpha\beta}(x,u)D_\alpha uD_\beta u\,\mathrm{d}s-\frac{n}{2}\int_\Omega u\cdot f(x,u)\mathrm{d}x$$

$$-\frac{1}{2}\int_\Omega(x\cdot DA^{\alpha\beta})D_\alpha u\cdot D_\beta u\mathrm{d}x \tag{8}$$

以(8)代入(7)中最后一项得

$$\frac{1}{2}\int_{\partial\Omega}(x\cdot\nu)A^{\alpha\beta}(x,u)D_\alpha u\cdot D_\beta u\mathrm{d}s=n\int_\Omega F(x,u)\mathrm{d}x+\frac{2-n}{2}\int_\Omega u\cdot f(x,u)\mathrm{d}x$$

$$+\int_\Omega(x\cdot D_xF)\mathrm{d}x-\frac{1}{2}\int_\Omega(x\cdot DA^{\alpha\beta})D_\alpha u\cdot D_\beta u\mathrm{d}x$$

于是得到

定理1 Dirichlet问题(Ⅰ)的解u必须满足积分恒等式(3)。

注意，在推导积分恒等式的过程中并没有涉及到方程组的椭圆性。

3 非存在性结果

作为积分恒等式(2)的一种应用，考虑特征值问题：

$$(\text{Ⅱ})\begin{cases}-D_\alpha(A^{\alpha\beta}(x)D_\beta u)=f(u)+\lambda u & \text{在}\Omega\text{中}\\ u=0 & \text{在}\partial\Omega\text{上}\end{cases} \tag{9}$$

其中$f(u)$的各个分量$f_i(u)$都是$u^1,u^2,\cdots,u^N$的$p=(n+2)/(n-2)$次齐次函数。设存在函数$F(u)$使有

$$\mathrm{grad}F(u)=f(u),\qquad F(0)=0$$

则$F(u)$是$u^1,u^2,\cdots,u^N$的$p+1$次齐次函数。于是有

$$u\cdot f(u)=(p+1)F(u)$$

$$n\left[F(u)+\frac{\lambda}{2}|u|^2\right]+\frac{2-n}{2}\left[u\cdot f(u)+\lambda|u|^2\right]=\lambda|u|^2$$

注意，$p+1=2n/(n-2)$恰为嵌入$H^{1,2}(\Omega,\mathbf{R}^N)\subset L^{p+1}(\Omega,\mathbf{R}^N)$的临界指数，此时边值问题(Ⅱ)的解必须满足的积分恒等式是

$$\lambda\int_\Omega|u|^2\mathrm{d}x=\frac{1}{2}\int_{\partial\Omega}(x\cdot\nu)A^{\alpha\beta}(x)D_\alpha u\cdot D_\beta u\mathrm{d}x$$

$$+\frac{1}{2}\int_\Omega(x\cdot DA^{\alpha\beta}(x))D_\alpha u\cdot D_\beta u\mathrm{d}x$$

设方程组(9)是椭圆形的，即系数矩阵满足条件：

$$A^{\alpha\beta}(x)\xi_\alpha\xi_\beta\geqslant\mu|\xi|^2\quad\forall\xi\in\mathbf{R}^n,\ x\in\Omega,\ \mu>0 \tag{11}$$

再设系数矩阵满足条件

$$[x\cdot DA^{\alpha\beta}(x)]\geqslant0\quad\text{在}\Omega\text{中} \tag{12}$$

例如当$A^{\alpha\beta}(x)$是$x_1,x_2,\cdots x_n$的m次齐次函数时便有

$$[x\cdot DA^{\alpha\beta}(x)]=m[A^{\alpha\beta}(x)]>0\qquad m>0$$

条件(12)意味着存在某常数$\delta\geqslant0$使有

$$(x\cdot DA^{\alpha\beta}(x))D_\alpha u D_\beta u \geqslant \delta|Du|^2 \tag{13}$$

利用Poincaré不等式得

$$2\lambda\int_\Omega |u|^2 \mathrm{d}x \geqslant \int_{\partial\Omega}(x\cdot\nu)A^{\alpha\beta}(x)D_\alpha u\cdot D_\beta u \mathrm{d}s + \delta c\int_\Omega |u|^2 \mathrm{d}x$$

这里c为一定常数，详见〔5〕。于是得到

推论1 设Ω是星形域，且方程组（9）的系数矩阵满足条件（11）和（12），则当$\lambda\leqslant\dfrac{\delta}{2}c$时问题（Ⅱ）无非平凡解。

由此推知，Dirichlet问题：

$$\begin{cases} -D_\alpha(A^{\alpha\beta}(x)D_\beta u)=f(u) & \text{在}\Omega\text{中} \\ u=0 & \text{在}\partial\Omega\text{上} \end{cases}$$

无非平凡解。当$N=1$且$A^{\alpha\beta}(x)=\delta_{\alpha\beta}$时的特别情形就是上述Pohozaev反例。

考虑特征值问题

$$(\mathrm{III})\begin{cases} -D_\alpha(A^{\alpha\beta}(x)D_\beta u)=f(u)+\lambda u & \text{在}\Omega\text{中} & (14) \\ \sum_{i=1}^N u^i>0 & \text{在}\Omega\text{中} & (15) \\ u=0 & \text{在}\partial\Omega\text{上} & \end{cases}$$

设 $$\sum_{i=1}^N f_i(u)\geqslant 0 \tag{16}$$

根据线性方程的特征值理论[2]，特征值问题

$$\begin{cases} D_\alpha(A^{\alpha\beta}(x)D_\beta V)+\lambda V=0 & \text{在}\Omega\text{中} \\ V=0 & \text{在}\Omega\text{上} \end{cases}$$

的最小特征值$\Lambda>0$，它的非负特征函数记作φ即有

$$D_\alpha(A^{\alpha\beta}(x)D_\beta\varphi)+\Lambda\varphi=0 \qquad \text{在}\Omega\text{中}$$

以φ乘方程组（14）中各个方程，分部积分后叠加得

$$\Lambda\int_\Omega\varphi\sum_{i=1}^N u^i\mathrm{d}x=\int_\Omega\varphi\sum_{i=1}^N f_i(u)\mathrm{d}x+\lambda\int_\Omega\varphi\sum_{i=1}^N u^i\mathrm{d}x$$

由条件（15）和（16）知 $\Lambda>\lambda$，于是得

推论2 除推论1中的条件外方程组（14）还满足条件（16）。则当$\lambda\notin\left(\dfrac{\delta c}{2},\Lambda\right)$时问题（Ⅲ）无解。

推论2表明，满足条件（16）的特征值问题(Ⅲ)的特征值如果存在，它们必定落在区间$\left(\dfrac{\delta}{2}c,\ \Lambda\right)$之中。

附注 如果在方程组（9）中把λu改为（$\lambda_1u^1,\lambda_2u^2,\cdots,\lambda_Nu^N$），则相应地把推论1中的结论改为当$\max\limits_i\lambda_i\leqslant\dfrac{\delta}{2}c$时问题（Ⅱ）无非平凡解；把推论2中的结论改为当$\dfrac{\delta}{2}c\geqslant\max\limits_i\lambda_i$和$\min\limits_i\lambda_i\geqslant\Lambda$时问题（Ⅲ）无解。

考虑特征值问题

$$(\mathrm{IV})\begin{cases} -\Delta u = f(x,u)+\lambda u & \text{在}\Omega\text{内} \\ u=0 & \text{在}\partial\Omega\text{上} \end{cases} \tag{17}$$

设$F(x,u)$是关于 $u^1,u^2,\cdots,u^N$的 $p+1$ 次齐次和关于 $x_1,x_2,\cdots,x_n$ 的 k 次齐次函数。则由（3）有：

$$[n+2+2k+(n-2)p]\int_\Omega F(x,u)\mathrm{d}x+2\lambda\int_\Omega u^2\mathrm{d}x=\frac{1}{2}\int_{\partial\Omega}(x\cdot\nu)|\nabla u|^2\mathrm{d}x$$

由方程组（17）直接得

$$\int_\Omega|\nabla u|^2\mathrm{d}u=(p+1)\int_\Omega F(x,u)\mathrm{d}x+\lambda\int_\Omega|u|^2\mathrm{d}x$$

当 $p\geqslant\dfrac{u+2+2k}{n-2}$且$\Omega$为星形域时便有

$$e\int_\Omega|\nabla u|^2\mathrm{d}x\leqslant\lambda\int_\Omega|u|^2\mathrm{d}x$$

其中 $$e=\left[\left(\frac{n}{2}-1-\frac{n-k}{p+1}\right)^{-1}+1\right]^{-1}$$

由Poincaré不等式得

$$e\Lambda_1\int_\Omega|u|^2\mathrm{d}x\leqslant\lambda\int_\Omega|u|^2\mathrm{d}x$$

于是得到

推论 3 设Ω为星形域，$F(x,u)$为u的$p+1$次齐次和 x 的 k 次齐次函数。则当 $\lambda\notin[e\Lambda_1,\Lambda_1)$时问题（Ⅳ）无非平凡解。

4 特征值问题

考虑特征值问题

$$(\mathrm{V})\begin{cases} \Delta u+f(u)+\lambda u=0 & \text{在}\Omega\text{中} \\ \sum_{i=1}^{N}u^i>0 & \text{在}\Omega\text{中} \\ u=0 & \text{在}\partial\Omega\text{上} \end{cases}$$

这里 $f_i(u)$为$u^1,u^2,\cdots,u^N$的$p=(n+2)/(n-1)$ 次齐次多项式，它们的系数和等于同一实数$a>0$，此外还满足条件（16）。

只考虑$u^1=u^2=\cdots=u^N=w$情形的解，此时方程组（18）中各个方程变为同一方程。作伸缩变换$v=a^{1/(p-1)}w$后得特征值问题

$$\begin{cases} \Delta v+v^p+\lambda v=0 & \text{在}\Omega\text{中} \\ v>0 & \text{在}\Omega\text{中} \\ v=0 & \text{在}\partial\Omega\text{上} \end{cases}$$

当$\lambda\in(0,\Lambda_1)$时文[2]中已运用山路引理证明了解的存在性。从而证明了问题（Ⅴ）解的存在。结合推论2得

定理 2 在星形域内，问题（V）的特征值分布成一区间$[0,\Lambda_1)$。

参 考 文 献

1 Похожаев С И.Доклабы Акабемий Hayk, CCCP, 1965; 165(1): 36～39
2 Brezis H, Nirenberg L. Comm Pure Appl Math, 1983; XXXVI: 437～478
3 陈宝耀. 数学物理学报, 1986; (3): 459～466
4 陈宝耀. 数学年刊, 1988; 9A(4): 482～487
5 Gilberg D, Trudinger N S. Springer Valay, 1983: 157

An Eigenvalue Problem of the Quasilinear Elliptic Systems in Diagonal Form

*Chen Baoyao** *Chen Jie*

Abstract

We give an integral identity for the quasiliear elliptic systems in diagonal form, and prove that all eigenvalues of a class for semilinear elliptic systems form an interval(o, Λ_1).

Keywords diagonal form, quasilinear eliptis systems, eigenvalue, problem.

* Department of Mathematics