中山大学学报（自然科学版）
第31卷 第1期 1992年
ACTA SCIENTIARUM NATURALIUM UNIVERSITATIS SUNYATSENI
Vol.31 №.1 1992

对流扩散方程扩散系数反演的一点注记*

朝 红 阳

（计算机科学系）

摘 要 对流—扩散方程中扩散系数反演问题，可以归结为一个特殊的非线性算子方程求解问题。通过对上述微分方程初边值问题（正问题）广义古典解的先验估计，给出了正问题解的正则性与扩散系数之间的依赖关系。并据此讨论了反问题提法的合理性，以及相应非线性算子的特性（连续性、弱闭性、紧致性）。

关键词 反问题，扩散系数，非线性算子

1 问题的提出

考虑对流扩散方程的初边值问题

$$\begin{cases}\dfrac{\partial u}{\partial t}-\dfrac{\partial}{\partial x}\left(k(x)\dfrac{\partial u}{\partial x}\right)+a(x,t)\dfrac{\partial u}{\partial x}=f(x,t), & 0\leqslant x\leqslant 1,\quad 0\leqslant t\leqslant T\\ u(x,0)=\bar{u}_0(x), & 0\leqslant x\leqslant 1\\ u(0,t)=g_0(t),\quad u(1,t)=g_1(t), & 0\leqslant t\leqslant T\end{cases}\tag{1}$$

及附加测量条件

$$Pu(x_0,t)=h(t),\qquad x_0\in[0,1]\quad 0\leqslant t\leqslant T\tag{2}$$

其中，a、f、$\bar{u}_0$、g_0、g_1及h是已知函数，满足一定的正则性条件和相容性条件。算子P为某一线性算子。所谓系数反问题，指的是利用测量得到的数据（2）及方程组（1）反求扩散系数$k\in\mathscr{H}$，其中$\mathscr{H}=\{k\in H^1(0,1);\ k^*\geqslant k(x)\geqslant k_*>0,\ x\in[0,1]\}$。这是一个有重要应用背景的反问题，它可以描述非均匀物体热传导的遥感[1]，油与地下水的存储分析问题[2]，以及环境污染数学模型的扩散系数辨识问题[3]等。

经简单变换，（1）—（2）等价于

$$\begin{cases}\dfrac{\partial u}{\partial t}-\dfrac{\partial}{\partial x}k\dfrac{\partial u}{\partial x}+a(x,t)\dfrac{\partial u}{\partial x}=f(x,t)-g(t)k'(x)\\ u(x,0)=u_0(x), & 0\leqslant x\leqslant 1\\ u(0,t)=u(1,t)=0, & 0\leqslant t\leqslant T\end{cases}\tag{3}$$

$$Pu(x_0,t)=h(t),\quad 0\leqslant t\leqslant T\tag{4}$$

本文1990年10月17日收到

* 国家自然科学基金资助项目

其中，a、f、u_0、g、h为已知量。任给$k\in\mathscr{H}$，设$u=u(k;\ x,t)$是（3）的解，定义非线性算子Q如下：$\forall k\in\mathscr{H}$，$Q(k)(t)=Pu(k;\ x_0,t)$，则上述扩散系数反问题就等价于求解非线性算子方程

$$Q(k)=h \tag{5}$$

关于扩散系数的反演问题（即求解算子方程（5）），已有许多学者给出了数值方法，如脉冲谱方法（PST）[1]，扰动法[4]及其他[5]。但由于反问题内在的非线性性和不适定性，使其理论分析与数值计算方面的工作仍然很不完善，其中还有许多问题需待解决。本文将通过对正问题（3）的解$u=u(k;\ x,t)$的定性和定量讨论，给出正问题的解与未知参数$k\in\mathscr{H}$之间的依赖关系，并给出一系列的先验估计（这些先验估计在反问题数值方法的定性讨论中有重要应用），讨论了线性算子P取何种形式时反问题的提法是合理的。进而对非线性算子Q的性质进行了分析，为反问题的理论分析及数值计算奠定了基础。

方便起见，我们先给出一些空间记号。设X为Banach空间，定义套空间

$$B(0,T;\ X)=\{\,u:[0,T]\to X;\ \|u(t)\|_X\in B(0,T)\,\},$$

其中B根据具体情况表示具体的空间，例如

$$L^P(0,T;\ X)=\{\,u:[0,T]\to X;\ \|u(t)\|_X\in L^P(0,T),\quad 1\leqslant P\leqslant\infty\,\}$$

等等。

2　正问题的解与扩散系数的依赖关系

令$\Omega_T=[0,1]\times[0,T]$，$F=L^2(\Omega_T)$，$G=L^2(0,T)$，且令$H^0=L^2(0,1)$，$H^i=H^i(0,1)$，$i=1,2$。

采用Galerkin方法或有限差分法，并类似[6]中的处理方法，可以得到正问题(3)广义古典解的存在唯一性，有下述结果。

引理1　设$a(x,t)$，$f(x,t)\in C^1(\Omega_T)$，$g(t)\in C^1[0,T]$，且$u_0\in H^2(0,1)$，则存在唯一的$u(x,t)\in U$，$u(x,0)=u_0(x)$，使得对$\forall t\in[0,T]$，$u(x,t)$在[0，1]上几乎处处满足

$$\frac{\partial u}{\partial t}-\frac{\partial}{\partial x}k\frac{\partial u}{\partial x}+a(x,t)\frac{\partial u}{\partial x}=f(x,t)-g(t)k' \tag{6}$$

其中
$$\begin{aligned}U=&C([0,T];\ H_0^1(0,1))\cap L^\infty(0,T;\ H^2(0,1))\\&\cap W^{1,\infty}(0,T;\ L^2(0,1))\cap W^{1,2}(0,T;\ H^1(0,1))\end{aligned} \tag{7}$$

为了讨论非线性算子Q的性质，下面给出广义古典解关于系数$k\in\mathscr{H}$的依赖关系。

引理2　设引理1的条件满足，则对$\forall k\in\mathscr{H}$，（6）的解有如下估计：存在与$k\in\mathscr{H}$无关的常数c_1使

$$\left\{\begin{aligned}&\|u\|_{L^2(0,T;H^1)}\leqslant c_1,\\&\|u\|_{L^\infty(0,T;H^1)}+\left\|\frac{\partial u}{\partial t}\right\|_{L^2(0,T;H^1)}+\left\|\frac{\partial u}{\partial x}\right\|_{L^\infty(0,T;H^1)}\\&\qquad+\left\|\frac{\partial u}{\partial x}\right\|_{L^\infty(0,T;L^\infty(0,1))}\leqslant c_1(1+\|k'\|_{H^0})\\&\left\|\frac{\partial^2 u}{\partial x^2}\right\|_{L^\infty(0,T;H^0)}\leqslant c_1(1+\|k'\|_{H^0}+\|k'\|_{H^0}^2)\end{aligned}\right. \tag{8}$$

证明 (i)用$u(\cdot,t)$与(6)两端相乘，并在[0,1]上积分，利用 Cauchy 不等式可得

$$\frac{\mathrm{d}}{\mathrm{d}t}\|u(t)\|^2_{H^0}+k_*\|\frac{\partial u(t)}{\partial x}\|^2_{H^0}\leqslant\|f(t)\|^2_{H^0}+\frac{2k^{*2}}{k_*}g^2(t)+(\frac{2a_0^2}{k_*}+1)\|u\|^2_{H^0},$$

其中

$a_0=\max\limits_{(x,t)\in\Omega_T}|a(x,t)|$。对$\forall t'\in[0,T]$，上式在$[0,t']$上积分，可得

$$\|u(t)\|_{H^0}+k_*\int_0^{t'}\|\frac{\partial u(t)}{\partial x}\|^2_{H^0}\mathrm{d}t\leqslant\|f\|^2_F+\frac{2k^{*2}}{k_*}\|g\|^2_G+u(0)\|^2_{H^0}$$

$$+(\frac{2a_0^2}{k_*}+1)\int_0^{t'}\|u(t)\|^2_{H^0}\mathrm{d}t \tag{9}$$

由Bellman不等式得

$$\|u(t)\|^2_{H^0}\leqslant\left(\|u_0\|^2_{H^0}+\|f\|^2_F+\frac{2k^{*2}}{k_*}\|g\|^2_G\right)e^{\left(\frac{2a_0^2}{k_*}+1\right)}\triangleq M_1^2,\forall t\in[0,T] \tag{10}$$

显然M_1是与$k\in\mathscr{K}$无关的常数，(10)式代入(9)，得

$$\|\frac{\partial u}{\partial x}\|_{L^2(0,T,H^0)}\leqslant\tilde{M}_1 \tag{11}$$

其中$\tilde{M}_1$是与$k\in\mathscr{K}$无关的常数。

(ii)用$\frac{\partial u(\cdot,t)}{\partial t}$与(6)两端在[0,1]上作内积，得

$$\|\frac{\partial u(t)}{\partial t}\|^2_{H^0}+\frac{1}{2}\frac{\mathrm{d}}{\mathrm{d}t}(k\frac{\partial u}{\partial x},\frac{\partial u}{\partial x})_{H^0}+(a(\cdot,x)\frac{\partial u(t)}{\partial x},\frac{\partial u(t)}{\partial t})_{H^0}$$

$$=(f(\cdot,t),\frac{\partial u(t)}{\partial t})_{H^0}-g(t)(k',\frac{\partial u(t)}{\partial t})_{H^0},$$

利用Cauchy不等式并在$[0,t']$上积分，再根据Bellmen 不等式可知，对$\forall t\in[0,T]$，有

$$\|\frac{\partial u(t)}{\partial x}\|^2_{H^0}\leqslant\left[\frac{4}{k_*}(\|f\|^2_F+\|g\|^2_G\|k'\|^2_{H^0})+\frac{k^*}{k_*}\|u_0'\|^2_{H^0}\right]e^{4a_0^2T/k_*}$$

$$\|\frac{\partial u}{\partial t}\|^2_F\leqslant[\frac{4}{k_*}(\|f\|^2_F+\|g\|^2_G\|k'\|^2_{H^0})+\frac{k^*}{k_*}\|u_0'\|_{H^0}]e^{4a_0^2T/k_*}$$

$$+4(\|f\|^2_F+\|g\|^2_G\|k'\|^2_{H^0})+k^*\|u_0'\|^2_{H^0}$$

由上两式易见存在与$k\in\mathscr{K}$无关的常数M_2，使

$$\|\frac{\partial u(t)}{\partial x}\|_{H^0}\leqslant M_2(1+\|k'\|_{H^0}),\quad\forall t\in[0,T] \tag{12}$$

$$\|\frac{\partial u}{\partial t}\|_F\leqslant M_2(1+\|k'\|_{H^0}).$$

(iii)令$z(x,t)=\dfrac{\partial u(x,t)}{\partial t}$，对(6)式两端关于$t$求广义偏导数，然后采用类似(i)中的处理方法可得

$$\|z(t')\|^2_{H^0}+k_*\int_0^{t'}\|\frac{\partial z(t)}{\partial x}\|^2_{H^0}dt\leqslant(a_1+1+\frac{2a_0^2}{k_*})\int_0^{t'}\|z(t)\|^2_{H^0}dt$$

$$+\|\frac{\partial f}{\partial t}\|^2_F+\frac{2k^{*2}}{k_*}\|g'\|^2_G+\|z(0)\|^2_{H^0}+a_1M_1^2T \tag{13}$$

其中　$a_1=\max\limits_{(x,t)\in\Omega_T}|\dfrac{\partial a}{\partial t}(x,t)|$，由于

$$z(x,0)=\frac{\partial u(x,0)}{\partial t}=f(x,0)-g(0)k'+ku_0''(x)+k'u_0'+a(x,0)u_0',$$

易见存在与$k\in\mathscr{X}$无关的常数M_3，使

$$\|z(0)\|_{H^0}\leqslant M_3(1+\|k'\|_{H^0}).$$

代入(13)式并利用Bellmen不等式可知，存在与$k\in\mathscr{X}$无关的常数M_4，使

$$\|z(t)\|_{H^0}\leqslant M_4(1+\|k'\|_{H^0}) \tag{14}$$

$$\|\frac{\partial z}{\partial x}\|_{L^2(0,T;H^0)}\leqslant M_4(1+\|k'\|_{H^0}).$$

(iv)由(6)、(10)-(12)及(14)式，有

$$\|\frac{\partial}{\partial x}k\frac{\partial u(t)}{\partial x}\|_{H^0}\leqslant M_5(1+\|k'\|_{H^0})$$

M_5是与$k\in\mathscr{X}$无关的常数，再由Sobolev嵌入定理，有

$$\|\frac{\partial u(t)}{\partial x}\|_{L^\infty(0,1)}=\|\frac{1}{k}k\frac{\partial u(t)}{\partial x}\|_{L^\infty(0,1)}\leqslant\frac{1}{k_*}\|k\frac{\partial u(t)}{\partial x}\|_{L^\infty(0,1)}$$

$$\leqslant\frac{2}{k_*}(M_5+k^*M_2)(1+\|k'\|_{H^0})$$

从而

$$\|\frac{\partial^2u(t)}{\partial x^2}\|_{H^0}=\|\frac{1}{k}(\frac{\partial}{\partial x}k\frac{\partial u(t)}{\partial x}-k'\frac{\partial u(t)}{\partial x})\|_{H^0}\leqslant\frac{1}{k_*}\Big\{\|\frac{\partial}{\partial x}k\frac{\partial u(t)}{\partial x}\|_{H^0}$$

$$+\|\frac{\partial u(t)}{\partial x}\|_{L^\infty(0,1)}\|k'\|_{H^0}\Big\}\leqslant M_6(1+\|k'\|_{H^0}+\|k'\|^2_{H^0}) \tag{15}$$

其中M_6是与$k\in\mathscr{X}$无关的常数。

由(10)-(12)，(14)-(15)式知(8)式成立。#

3　算子Q的一些性质

由上述讨论可以推断，当线性算子P中关于x的偏导算子不超过一阶（实际问题中给出的测量数据通常满足这一条件），则由Sobolev空间迹定理可知函数$Pu(x,t)$在$x=x_0$处的迹$Pu(x_0,t)$存在且属于$L^2(0,T)$，从而对$\forall k\in\mathscr{X}$，非线性算子Q均有定义。换句话

说，集合$\mathscr{X}$是算子Q定义域的一个子集。

如果算子P取特殊形式

$Pu(x_0,t)=u(x_0,t)$，$x_0\in(0,1)$为固定点，则还可得到由这一线性算子P导出的非线性算子Q的某些性质。

设D_{x_0}为直线$x=x_0$与Ω_T之交，$D=[0,T]$，有

引理 3 设函数$u(x,t)\in L^2(\Omega_T)$，且其广义导数$\frac{\partial u}{\partial x}$存在并属于$L^2(\Omega_T)$，则在截线$D_{x_0}$上的迹$u|_{D_{x_0}}$存在且属于$L^2(D)$，并有估计式

$$\|u(x_0)\|^2_{L^2(D)}\leqslant 2\left(\|u\|^2_{L^2(\Omega_T)}+\left\|\frac{\partial u}{\partial x}\right\|^2_{L^2(\Omega_T)}\right) \tag{16}$$

由上节的讨论及引理 3，立得

定理 1 对$\forall k\in\mathscr{X}$，在引理 1 的条件下，有与$k\in\mathscr{X}$无关的常数C_2，使

$$\|Q(k)\|_G\leqslant C_2 \tag{17}$$

$$\left\|\frac{\mathrm{d}Q(k)}{\mathrm{d}t}\right\|_G\leqslant C_2(1+\|k'\|_{H^0}).$$

定理 2 设引理 1 的条件满足，则对$\forall k_1$，$k_2\in\mathscr{X}$，有与k_1，k_2无关的常数C_3，使

$$\|Q(k_1)-Q(k_2)\|_G\leqslant C_3\|k_1-k_2\|_{L^\infty(0,1)} \tag{18}$$

证明 令$\triangle k=k_1-k_2$，$w(x,t)=u_1(x,t)-u_2(x,t)$，其中$u_i=u(k_i,x,t)$是当$k=k_i$ $(i=1,2)$时正问题(3)的解，则w满足

$$\begin{cases}\dfrac{\partial w}{\partial t}-\dfrac{\partial}{\partial x}k_1\dfrac{\partial w}{\partial x}+a\dfrac{\partial w}{\partial x}=-g(t)\dfrac{\partial \Delta k}{\partial x}+\dfrac{\partial}{\partial x}\Delta k\dfrac{\partial u_2}{\partial x}\\ w(x,0)=0,\\ w(0,t)=w(1,t)=0\end{cases}$$

用$w(\cdot,t)$与上述方程组的第一式在$[0,1]$上作内积，并类似上节的方法进行处理，有

$$\frac{\mathrm{d}}{\mathrm{d}t}\|w(t)\|^2_{H^0}+k_*\left\|\frac{\partial w(t)}{\partial x}\right\|^2_{H^0}\leqslant\frac{2a_0^2}{k_*}\|w(t)\|^2_{H^0}+\frac{2g_0^2}{k_*}\|\Delta k\|^2_{H^0}$$
$$+\frac{2}{k_*}\left\|\frac{\partial u_2}{\partial x}\right\|^2_{H^0}\|\Delta k\|^2_{L^\infty},$$

其中$g_0=\max\limits_{t\in(0,T)}|g(t)|$。上式在$(0,t)$上积分，并利用Bellmen不等式及(8)式，有

$$\|w(t)\|^2_{H^0}\leqslant\left(\frac{2g_0^2}{k_*}T\|\Delta k\|^2_{H^0}+\frac{2}{k_*}C_1\|\Delta k\|_{L^\infty}\right)e^{2a_0^2T/k_*}$$

$$\left\|\frac{\partial w(t)}{\partial x}\right\|^2_{L^2(\Omega_T)}\leqslant\frac{2a_0^2}{k_*^2}T\left(\frac{2g_0^2}{k_*}T\|\Delta k\|^2_{H^0}+\frac{2}{k_*}C_1\|\Delta k\|^2_{L^\infty}\right)e^{2a_0^2T/k_*}$$
$$+\frac{1}{k_*^2}\left(2g_0^2T\|\Delta k\|^2_{H^0}+\frac{2}{k_*}C_1\|\Delta k\|^2_{L^\infty}\right)$$

由于C_1是与k_1、k_2无关的常数（引理2），故由上两式及$L^\infty(0,1)\subset L^2(0,1)=H^0$知，存在与$k_1$和$k_2$无关的常数$M_7>0$，使

$$\|w(t)\|_{H^0}\leqslant M_7\|\Delta k\|_{L^\infty(0,1)}$$

$$\left\|\frac{\partial w}{\partial x}\right\|_{L^2(\Omega_T)}M_7\|\Delta k\|_{L^\infty(0,1)}$$

再由引理3知（18）式成立。

定理2表明了算子Q在集合$\mathscr{X}$上的连续性。

定理3　在引理2的条件下，算子Q为紧算子，即Q把$\mathscr{X}$中的有界集映为$G=L^2(0,T)$上的紧致集。

证明　设$\mathscr{X}_0$是$\mathscr{X}$中的有界集，即存在M_8使

$$\|k\|_{H^1}\leqslant M_8,\quad \forall k\in\mathscr{X}_0,$$

由定理1可知

$$\|Q(k)\|_{H^1(0,T)}\leqslant C_4,\quad \forall k\in\mathscr{X}_0$$

其中C_4是仅与k^*、k_*及M_8有关的常数。由于$H^1(0,1)\subset L^2(0,T)$是紧的，故集合$\{Q(k)\}_{k\in\mathscr{X}_0}$在$L^2(0,T)$中有收敛的子序列$\{Q(k_n)\}$，使

$$\lim_{n\to\infty}Q(k_n)=h_0,\quad 于L^2(0,T)$$

从而算子Q将$\mathscr{X}$中的有界集映为$L^2(0,T)$中的紧致集。

定理4　在引理1的条件下，算子Q在集合$\mathscr{X}$上弱闭，即若有$\{k_n\}\subset\mathscr{X}$，使得

$$\begin{cases}(弱)\lim\limits_{n\to\infty}k_n=k_0,\quad 于H^1(0,1)中\\ (弱)\lim\limits_{n\to\infty}Q(k_n)=h_0,\quad 于L^2(0,T)中\end{cases}\tag{19}$$

则必有$k_0\in\mathscr{X}$，$Q(k_0)=h_0$。

证明　显然集合$\mathscr{X}$为凸闭集。设$\{k_n\}\subset\mathscr{X}$满足(19)式，由Banach-Saks定理[7]，存在$\{k_n\}$的一个凸性组合

$$V_n=\sum_{i=n}^{n+m_n}\lambda_{i,n,m_n}k_i\in\mathscr{X},\quad \lambda_{i,n,m_n}\geqslant 0,\quad \sum_i\lambda_{i,n,m_n}=1$$

强收敛于k_0（于H^1中），由于$\mathscr{X}$闭，故$k_0\in\mathscr{X}$。

下面往证$Q(k_0)=h_0$。由于序列$\{k_n\}$在H^1中弱收敛，故$\{k_n\}$在H^1中有界，再由紧嵌入定理知$H^1(0,1)\subset C[0,1]$是紧的，因此存在子列$\{k_{n_i}\}\subset\{k_n\}$，使

$$\|k_{n_i}-k_0\|_{L^\infty}\to 0,\quad i\to\infty$$

而由定理2知

$$\lim_{i\to\infty}\|Q(k_{n_i})-Q(k_0)\|_{L^2(0,T)}=0$$

又因为（弱）$\lim\limits_{i\to\infty}Q(k_{n_i})=h_0$，故有$Q(k_0)=h_0$。#

综合本节的讨论，可以看出在引理1的条件下，算子Q具下列性质

(P1)若k_1，$k_2 \in \mathscr{K}$，则有

$$\|Q(k_1)-Q(k_2)\|_G \leqslant \text{const}\,\|k_1-k_2\|_{L^\infty};$$

(P2)算子Q在集合$\mathscr{K}$上弱闭；

(P3)算子Q把$\mathscr{K}$上的有界集映为$G=L^2(0,T)$上的紧致集。

参 考 文 献

1 Chen Y M, Liu J Q. A numerical algorithm for remote sensing of thermal conductivity, J C P, 1981,43(2): 315～326

2 Richter G R, An invevse problem for the steady state diffusion equation, SIAM J Appl Math, 1981, 41(2): 255～269

3 傅国伟，程声通．水污染控制系统规划．清华大学出版社，1985: 9

4 Marchuk G I. Methods of numerical mathematics, Springer-Verlag, 1980

5 Chao Hongyang. An Iterative Algorithm for the Coefficient Inverse Problem of Differential Equations, J. Computational Mathematics, 1990,8(4):298～306

6 Zhou Yulin. Applicalion of discrete functional analysis to finite difference, International Academic Publishers, 1990

7 吉田耕作．泛函分析．人民教育出版社，1981

A Note on the Inverse Problem of Diffusion Coefficient

*Chao Hongyang**

Abstract The problem of determining the diffusive coefficients can be formulated as one of solving a special nonlinear operator equation. The dependence of the generalized classical solution (for the initial-boundary problem of convection-diffusion equation) on the diffusive coefficient was presented, by working out the priori estimations of the generalized classical solution. In view of this we discussed the rationality of the inverse problem, and considered the characteristics (continuity, compactness and weak closeness) of the corresponding nonlinear operator. Some results obtained here lay the foundation for theoretical analysis and numerical computation of the inverse problem.

Keywords inverse problem, diffusion coefficient, nonlinear operator

* Department of Computer Science