

薄板振动的边界元法

徐卫华 赵 键 陈树坚

(中山大学应用力学与工程系)

摘 要 采用静力问题的格林函数作为权函数,建立薄板动力问题的边界积分方程式,并将惯性力项作为面分布载荷处理。实例计算表明,本算法具有较高精度,与理论解吻合甚好。

关键词 薄板振动,边界元法

近年来,边界元法得到了很大发展。文献[1]介绍了薄板弯曲静力问题的边界元法,其Green函数形式简便。然而对薄板动力问题来说,由于Green函数形式太复杂,使计算时间长。本文以静力问题的Green函数作为权函数,建立动力问题的边界积分方程式。并处理了角点项,计算了谐和力作用下板的强迫振动。

1 板弯曲静力问题的BEM公式

由板的理论可知,薄板弯曲问题在平面域 Ω 内的基本方程为

$$\nabla^2 \nabla^2 w(x, g) = q(x, g) / D \quad (\Omega) \quad (1)$$

式中, w 为中面挠度, q 为载荷(N/m^2), D 为板的抗弯刚度 $D = Eh^3/12(1-\nu^2)$, E 为弹性模量, h 为板厚度, ν 为泊松比。

其边界条件有

- ① 固支 $W = 0, \theta_n = 0 \quad (\Gamma)$
- ② 简支 $W = 0, M_n = 0 \quad (\Gamma)$
- ③ 自由 $M_n = 0, R_n = 0 \quad (\Gamma)$

其中, θ_n 、 M_n 、 R_n 分别为板的法向转角、弯矩及剪力。表达式为

$$\theta_n = \frac{\partial W}{\partial n}$$

$$M_n = - \left(\frac{\partial^2 W}{\partial n^2} + \nu \frac{\partial^2 W}{\partial s^2} \right)$$

$$R_n = - \left(\frac{\partial}{\partial n} (\nabla^2 W) + (1-\nu) \frac{\partial^3 W}{\partial n \partial s^2} \right)$$

n 为边界法向, s 为边界切向(图1), ν 为泊松比。

板弯曲的边界积分方程为

本文1991年12月11日收到

$$\begin{aligned}
 K \cdot W = & \iint_{\Omega} q \cdot W^* d\Omega + \int_{\Gamma} \left(R_n \cdot W^* - M_n \cdot \frac{\partial W^*}{\partial n} \right) d\Gamma \\
 & - \int_{\Gamma} \left(R_n^* \cdot W - M_n^* \cdot \frac{\partial W}{\partial n} \right) d\Gamma + \sum_{i=1}^m \left\{ \left[M_n \cdot W^* \right]_{\lambda_i} - \left[M_{ns}^* \cdot W \right]_{\lambda_{in}} \right\} \quad (2)
 \end{aligned}$$

其中, $[\cdot]_{\lambda_i}$ 表示在角点 λ_i 沿边界正向的跳跃值, 即 $[\cdot]_{\lambda_i} = (\cdot)_{\lambda_i}^+ - (\cdot)_{\lambda_i}^-$.

$M_{ns} = -(1-\nu) \frac{\partial^2 W}{\partial n \partial s}$, W^* 为方程(1)的奇异解, 即满足

$\nabla^2 \nabla^2 W = \Delta_i / D$, Δ_i 是 Dirac 函数. 式中 K 取值为

$$K = \begin{cases} 1 & (x, y) \in \Omega \\ \phi / 2\pi & (x, y) \in \Gamma \\ 0 & (x, y) \in \bar{\Omega} \end{cases}$$

ϕ 为边界内角(图1)

有关奇异解的一系列基本公式, 参见文献[1].

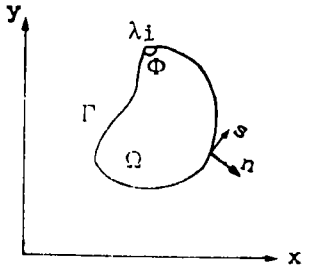


图1 平板的几何形状
Fig.1 Geometry of plates

2 用板静力问题公式求解板动力问题

弹性薄板振动基本方程为

$$\nabla^2 \nabla^2 W + \frac{\rho_m}{D} \frac{\partial^2 W}{\partial t^2} = q / D \quad (\Omega) \quad (3)$$

其中 ρ_m 为板的面密度.

考虑简谐激励 $q(x, y, t) = q(x, y) \cdot e^{i\omega t}$, $j = \sqrt{-1}$, 则 $W(x, y, t) = W(x, y) \cdot e^{i\omega t}$

方程(3)两边约去时间因子

$$\nabla^2 \nabla^2 W - \frac{\rho_m \omega^2}{D} W = q / D$$

或

$$\nabla^2 \nabla^2 W = (q + \rho_m \omega^2 W) / D \quad (4)$$

(4)式中将惯性项划归到分布载荷处理, 这就类似于(1)式中的静力问题. 应用静力问题的公式则相应地有如下积分公式

① 固支边界

$$K \cdot W = \iint_{\Omega} \left(\frac{q + \rho_m \omega^2 W}{D} \right) \cdot W^* d\Omega + \int_{\Gamma} \left(R_n \cdot W^* - M_n \cdot \frac{\partial W^*}{\partial n} \right) d\Gamma \quad (5)$$

② 简支边界

$$\begin{aligned}
 K \cdot W = & \iint_{\Omega} \left(\frac{q + \rho_m \omega^2 W}{D} \right) \cdot W^* d\Omega + \int_{\Gamma} \left(R_n \cdot W^* + M_n^* \cdot \frac{\partial W}{\partial n} \right) d\Gamma \\
 & + \sum_{i=1}^m \left[M_{ns} \cdot W^* \right]_{\lambda_i} \quad (6)
 \end{aligned}$$

③ 自由边界

$$K \cdot W = \iint_{\Omega} \frac{(q + \rho_m \omega^2 W)}{D} W^* d\Omega - \int_{\Gamma} \left(R_n^* W - M_n^* \cdot \frac{\partial W}{\partial n} \right) d\Gamma + \sum_{i=1}^m \left\{ [M_{ns} \cdot W^*]_{\lambda_i} - [M_{ns}^* \cdot W]_{\lambda_i} \right\} \quad (7)$$

3 角点项处理

式(6)与(7)都存在角点项必须处理。本文将根据扭矩公式 $M_{ns} = -(1-\nu) \frac{\partial^2 W}{\partial n \partial s}$ 的数学意义, 将其化作角点附近节点 $\frac{\partial W}{\partial N}$ 值沿切向的导数。如图2, 在角点 i 的两个切向共取5个节点, 并设 $\frac{\partial W}{\partial n}$ 沿边界作抛物线分布

$$\frac{\partial W}{\partial N} = AS^2 + BS + C \quad (S \text{方向如图2})$$

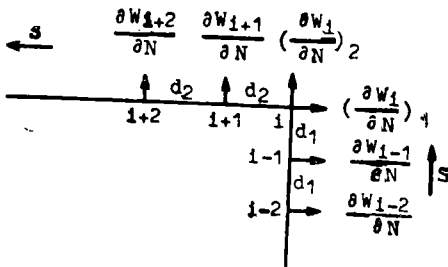


图2 角点示图

Fig. 2 Figure of discontinue point

在 $i-2, i-1, i$ 所在边界上可得

$$A = \frac{1}{2d_1^2} \left[\frac{\partial W_{i-2}}{\partial N} - 2 \frac{\partial W_{i-1}}{\partial N} + \left(\frac{\partial W_i}{\partial N} \right)_1 \right]$$

$$B = \frac{1}{2d_1} \left[\frac{\partial W_{i-2}}{\partial N} - 4 \frac{\partial W_{i-1}}{\partial N} + 3 \left(\frac{\partial W_i}{\partial N} \right)_1 \right]$$

$$C = \left(\frac{\partial W_i}{\partial N} \right)_1$$

于是

$$M_{ns} = -(1-\nu) \frac{\partial}{\partial S} \cdot \left(\frac{\partial W}{\partial N} \right) = -(1-\nu) \cdot (2AS + B)$$

角点 i 处, $S = 0$

$$(M_{ns})_1 = -(1-\nu) \cdot B = \frac{-(1-\nu)}{2d_1} \cdot \left[\frac{\partial W_{i-2}}{\partial N} - 4 \frac{\partial W_{i-1}}{\partial N} + 3 \left(\frac{\partial W_i}{\partial N} \right)_1 \right]$$

同理可得节点 $i, i+1, i+2$ 所在边界上 $\frac{\partial W}{\partial N}$ 的分布, 并且可得角点 i 处

$$(M_{ns})_2 = \frac{(1-\nu)}{2d_2} \cdot \left[\frac{\partial W_{i+2}}{\partial N} - 4 \frac{\partial W_{i+1}}{\partial N} + 3 \left(\frac{\partial W_i}{\partial N} \right)_2 \right]$$

所以

$$\begin{aligned} \sum_{i=1}^m \left[M_{n_i s} \cdot W^* \right] &= \frac{(1-\nu)}{2} \sum_{i=1}^m \left\{ \left[\frac{\partial W_{i+2}}{\partial N} - 4 \frac{\partial W_{i+1}}{\partial N} + 3 \left(\frac{\partial W_i}{\partial N} \right)_2 \right] \frac{W^*(i)}{d_2} \right. \\ &\quad \left. + \left[\frac{\partial W_{i-2}}{\partial N} - 4 \frac{\partial W_{i-1}}{\partial N} + 3 \left(\frac{\partial W_i}{\partial N} \right)_1 \right] \cdot \frac{W^*(i)}{d_1} \right\} \\ &= \frac{1-\nu}{2} \sum_{i=1}^m \left\{ \frac{1}{d_1} \left[\frac{\partial W_{i-2}}{\partial N} - 4 \frac{\partial W_{i-1}}{\partial N} + 3 \left(\frac{\partial W_i}{\partial N} \right)_1 \right] \right. \\ &\quad \left. + \frac{1}{d_2} \left[3 \left(\frac{\partial W_i}{\partial N} \right)_2 - 4 \frac{\partial W_{i+1}}{\partial N} + \frac{\partial W_{i+2}}{\partial N} \right] \right\} \cdot W^*(i) \end{aligned}$$

4 算例和结果分析

以简支边界为例,具体求解时,把板的边界离散成 n 个单元 Γ_i ($i=1, 2, \dots, n$) (每个单元作线性插值),有边界未知量 $2n$ 个 R_n , $\frac{\partial W}{\partial N}$, 当有 m 个角点时,每个角点增加一个法向导数为未知量;板内有 NI 个未知量(节点挠度)(每个单元作双线性插值)。因而共有未知量个数为 $2n+m+NI$ 。但式(6)只能给边界节点满足的 n 个边界条件 $W_i=0$ 和域内节点对应的挠度关系,得出 $n+NI$ 个线性方程,因而还须补充 $n+m$ 个方程才能求解。

(6)式两边对边界法向求导得

$$\begin{aligned} K \cdot \frac{\partial W}{\partial N} &= \iint_{\Omega} \frac{(q + \rho_m \omega^2 W)}{D} \cdot \frac{\partial W^*}{\partial N} d\Omega + \int_{\Gamma} \left(R_n \frac{\partial W^*}{\partial N} + \frac{\partial M_n^*}{\partial N} \frac{\partial W}{\partial n} \right) d\Gamma \\ &\quad + \sum_{i=1}^m \left[M_{ns} \frac{\partial W^*}{\partial N} \right]_{\lambda_i} \end{aligned} \quad (8)$$

有了(8)便可利用 n 个边界节点包括 m 个角点共 $n+m$ 个法向导数满足的条件,得到 $n+m$ 个方程。这些方程与前面提到的 $n+NI$ 个方程联立便可解出所有边界点未知量 R_n , $\frac{\partial W}{\partial N}$ 和域内节点挠度 W 。

【例】四边简支方板,边长 $a=4\text{m}$,受分布载荷 $q=2940\text{N/m}^2$ 。其中 ω 取值(见表1)。板的抗弯模量 $D=46158\text{N}\cdot\text{m}$,面密度 $\rho_m=1150\text{kg/m}^2$,泊松比 $\nu=1/6$,求板中心点挠度幅值。

计算结果表明,本方法有很高的精度,当边界划分单元增多时,结果逐步趋向解析解。

四边简支弹性矩形板固有频率计算公式为^[2]

$$\omega = \sqrt{\frac{D}{\rho_m} \left[\left(\frac{m\pi}{a} \right)^2 + \left(\frac{n\pi}{b} \right)^2 \right]}$$

表1 方板受均布载荷简谐激励下中心挠度

Tab.1 Displacement of square plate center under uniform harmonic load

$\omega(s^{-1})$	每边分4个单元		每边分8个单元		每边分16个单元		解析解 [文献3]
	挠度(mm)	误差(%)	挠度(mm)	误差(%)	挠度(mm)	误差(%)	
0	0.638	2.89	0.654	0.46	0.658	0.15	0.657
10.47	0.648	3.86	0.666	1.19	0.670	0.59	0.674
41.92	0.858	6.94	0.914	0.87	0.930	0.87	0.922
73.29	2.82	48.2	4.45	17.9	5.36	1.11	5.42
115.17	-0.755	35.6	-0.644	15.6	-0.614	10.2	-0.557
146.58	-0.339	29.9	-0.310	18.3	-0.299	10.5	-0.261

其中, a, b 为矩形板边长, m, n 分别代表矩形板两个互相垂直的边界方向的振型阶次。如取 $m = n = 1$ 时, 上例中的一阶固有频率 $\omega_1 = 78.2s^{-1}$, 取 $m = 1, n = 3$ 或 $m = 3, n = 1$ 时得四阶固有频率 $\omega_4 = 391.0s^{-1}$ 。当外部激励的频率与其中某阶固有频率接近时, 板将出现共振现象, 而只有 m, n 同时取奇数时, 对应的共振频率才能使得中心挠度明显地突出。图3给出了上例中每边划16个单元时, $\omega = 0 \sim 500s^{-1}$ 板中心挠度随 ω 变化的计算曲线。对应图3中的两个峰值情形, 表2给出了每边划分单元分别为8和16时板的一阶共振频率、四阶共振频率的计算值和精度。

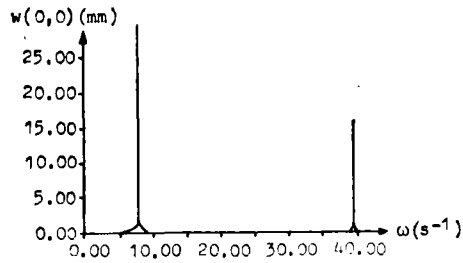


图3 均布载荷作用下, 方板中心点挠度随频率变化的曲线

Fig.3 The curve of displacement at square plate center varying with frequency under uniform load

表2 方板振动的共振频率

Tab.2 Resonant frequencies of square plate vibration

每边划分单元数	ω_1 (s^{-1})	相对误差(%)	ω_2 (s^{-1})	相对误差(%)
8	79.5	1.66	417	6.65
16	78.5	0.04	395.2	1.07
解析解	78.2		391.0	

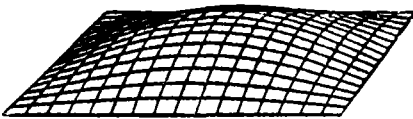


图4 方板的一阶振型图

Fig.4 The first order modal shape of square plate

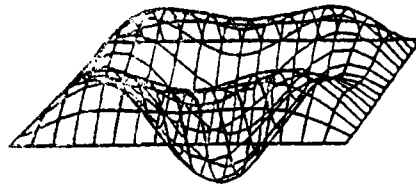


图5 方板的四阶振型图

Fig.5 The fourth order modal shape of square plate

计算结果与理论解吻合甚好,即使四阶共振频率误差也只有1.07%。

图4、图5分别给出一阶与四阶共振频率附近方板的振动模态。四阶共振频率附近的振型应为 $m=3, n=1$ 与 $m=1, n=3$ 两种模态的叠加。图5显示出对于受关于中心点对称载荷作用下的方板,这两种模态的叠加因子为1:1,板面振动速度分布关于中心点对称。

5 结 论

本文的BEM计算模式使用简便、精度高,适合任意边界形状的振动板。虽然与传统的BEM中相比,本文的解法增加了域内节点的挠度作为未知量,但计算公式简便。而传统的BEM振动问题奇异解形式复杂、计算时间长,且只能对频率逐个计算。本文解法中形成的基本矩阵式对各个不同频率是共用的,对计算多个频率尤为合适。如果应用于如声场计算这种需要已知板面振速分布的问题时,其优点更为突出,既节约了时间,精度又高。

参 考 文 献

- 1 许永林,唐锦春.浙江大学学报(自然科学版),1985,19(12):43~53
- 2 徐芝纶.弹性力学.北京:高等教育出版社,1982.99
- 3 曹国雄.弹性矩形薄板振动.北京:中国建筑工业出版社,1983.41~43

A Study on BEM for Thin Plate Vibration

Xu Weihua Zhao Jian Chen Shujian*

Abstract We introduce a method to establish the bounnary integration equations for dynamic problems of thin plates by employing the Green's function of static problems, in which the inertia term is regarded as distributing loads. Numerical results show that the method is of high accuracy and consists with theoretical solution

Keywords thin plate vibration, boundary element method

*Department of Applied Mechanics and Engineering, Zhongshan University