

一类带参数非对称振子*

黄 赧 彪

(中山大学应用力学与工程系, 广州 510275)

摘 要 讨论了一类带参数非对称振子的周期解的存在性、唯一性和稳定性; 对若干情形给出系统的振幅与参数的关系式, 以及参数的分叉值; 最后求出振子的一阶近似周期解、周期、频率和相图, 并与数值法作了比较.

关键词 非对称振子, 周期解, 分叉

分类号 TB123

强非线性振子的研究, 近 10 年来引起了广泛重视, 取得一些成果. 在定量计算方面, Burton^[1], 徐兆^[2], 戴世强^[3], 李丽^[4] 和 Lau S. L.^[5] 等先后提出了几种近似方法. 在定性分析方面, 文[6]对系统 $\ddot{x} + g(x) = \varepsilon f(x, \dot{x})$ 的周期解的存在性、唯一性和稳定性, 提出了一种简便的判别法. 本文利用文[6]的结果, 讨论具有非对称恢复力的带参数强非线性振子

$$\ddot{x} + Ax + Bx^2 = \varepsilon(\lambda - x^2)\dot{x} \quad (1)$$

局部特性, 导出 $A=9, 4, 1$ 三种情形, 参数 λ 与振幅的关系式, 从而很简便导出文[7]的结论. 最后用文[6]的方法分别求出 $A=9$ 和 $4, B=1, \lambda=1$ 及 $A=B=1, \lambda=0.015$ 时的一阶近似周期解、频率和周期. 与数值法的结果比较表明, 文[6]的方法有效且精度良好.

1 定性分析

系统(1)中, A, B 是常数, λ 是参数, $\varepsilon > 0$ 是小参数, 其一阶等价组为

$$\dot{x} = y, \quad \dot{y} = -Ax - Bx^2 + \varepsilon(\lambda - x^2)y \quad (2)$$

式(2)对应的退化组(2)对应的退化组($\varepsilon=0$)为

$$\dot{x} = y, \quad \dot{y} = -Ax - Bx^2 \quad (3)$$

记 $g(x) = Ax + Bx^2, f(x, \dot{x}) = (\lambda - x^2)\dot{x}, \Gamma(x) = \int_0^x g(\xi) d\xi = \frac{A}{2}x^2 + \frac{B}{3}x^3$. 依文[6]的结论:

收稿日期: 1992-10-27

* 国家自然科学基金、中山大学科研基金资助项目

(i) 当 $A > 0, B > 0$ 时, 取 $\beta_2 = -\frac{A}{B}, \alpha_1 = \beta_1 = 0, \alpha_2 = \frac{A}{2B}$;

当 $A > 0, B < 0$ 时, 取 $\beta_2 = \frac{A}{2B}, \alpha_2 = \beta_1 = 0, \alpha_1 = -\frac{A}{B}$,

则有

1) $V(\alpha_i) = V(\beta_i), i = 1, 2$;

2) $xg(x) > 0, x \in (\beta_2, \beta_1)$ 及 $x \in (\alpha_1, \alpha_2)$;

3) $V(\alpha) - V(x) > 0, x \in (\beta, \beta_1)$ 及 $x \in (\alpha_1, \alpha)$, 而 $\alpha \in (\alpha_1, \alpha_2), \beta \in (\beta_2, \beta_1)$ 且 $V(\alpha) =$

$V(\beta)$.

因此, 系统(3)有形如

$$S_{a_0}: x_0 = a_0 \cos \tau + b_0, y_0 = -a_0 \dot{\tau} \sin \tau \quad (4)$$

的周期解.

(ii) 若 $A = 0$; 或 $A < 0, B > 0$; 或 $A < 0, B < 0$, 则不存在 4 个数 $\beta_2 < \beta_1 \leq 0 \leq \alpha_1 < \alpha_2$, 使 $g(x)$ 和 $V(x)$ 满足上述条件 1), 2), 3), 即系统(3)无形如 S_{a_0} 的周期解, 从而系统(1)无周期解.

(iii) 当 $B = 0$ 时, 式(1)为人们熟知的 Van der Pol 方程.

下面讨论当 $AB \neq 0$ 时, 系统(1)在 S_{a_0} 附近的周期解的性态.

由保守系统的能量守恒性可得

$$\frac{1}{2}y^2 + \frac{A}{2}x^2 + \frac{B^2}{3}x^3 = E \quad (5)$$

把式(4)代入式(5), 得

$$a_0^2 \dot{\tau}^2 \sin^2 \tau + \frac{A}{2}(a_0 \cos \tau + b_0)^2 + \frac{B}{3}(a_0 \cos \tau + b_0)^3 = E \quad (6)$$

分别把 $\tau = 0$ 及 π 代入式(6), 可得

$$b_0 = -\frac{A}{2B} + \frac{1}{2} \sqrt{\frac{A^2}{B^2} - \frac{4a_0^2}{3}} \quad (7)$$

由式(7)可知, 振幅 a_0 须满足

$$a_0 < \frac{\sqrt{3}}{2} \left| \frac{A}{B} \right| \quad (8)$$

由式(6)可得

$$\dot{\tau} = \sqrt{B \sqrt{\frac{A^2}{B^2} - \frac{4a_0^2}{3}} + \frac{2a_0 B}{3} \cos \tau} \triangleq \omega_0(\tau) \quad (9)$$

由式(9)知, B 和 a_0 须满足 $B > 0$ 及 $a_0 < \frac{3}{4} \left| \frac{A}{B} \right|$. 记

$$Z(a_0) = -a_0 \int_0^{2\pi} f(x_0, y_0) \sin \tau d\tau \triangleq -(\lambda - \bar{\lambda}(a_0))D(a_0) \quad (10)$$

其中, $D(a_0) = a_0^2 \int_0^{2\pi} \omega_0 \sin^2 \tau d\tau > 0$

$$\bar{\lambda}(a_0) = \frac{1}{\int_0^{2\pi} \omega_0 \sin^2 \tau d\tau} \int_0^{2\pi} (a_0 \cos \tau + b_0)^2 \omega_0 \sin^2 \tau d\tau \tag{11}$$

对满足 $z(a_0) = 0$ 的 a_0 , 有

$$Z'(a_0) = -\bar{\lambda}'(a_0)D(a_0)$$

可见, $Z'(a_0)$ 的符号取决于 $\bar{\lambda}'(a_0)$ 的符号.

文[6]指出:

1° 若 $Z(a_0) \neq 0$, 则式(1)在 S_{a_0} 附近无周期解;

2° 若 $Z(a_0) = 0$, 且 $Z'(a_0) < 0 (> 0)$, 则式(1)在 S_{a_0} 附近有唯一且稳定(不稳定)的周期解.

利用上述结果, 讨论系统(1)的周期解随参数 λ 的变化而变化的情形:

① 由式(10)可知, 在 $\lambda \in (-\infty, 0)$ 内, 系统(1)在 S_{a_0} 附近无周期解 ($Z(a_0) \neq 0$).

② 计算结果表明, 存在 λ_1, λ_2 , 在 $\lambda \in (\lambda_1, \lambda_2)$ 内, 由式(11)确定的振幅 a_0 的变化区间为 $(0, a_1^*)$, 在此区间内, $Z'(a_0) < 0$, 即式(1)在 S_{a_0} 附近有唯一且稳定的周期解.

③ 对于区间 (λ_1, λ_2) 内的每一个 λ , 由式 $Z(a_0) = 0$ 确定两个 a_0 , 它们的变化区间分别为 (a_1^*, a_2^*) 及 (a_2^*, a_3^*) . 在 (a_1^*, a_2^*) 内, $Z'(a_0) < 0$, 解稳定; 在 (a_2^*, a_3^*) 内, $Z'(a_0) > 0$, 解不稳定.

④ 当 $\lambda > \lambda_2$ 时, 系统(1)在 S_{a_0} 附近无周期解.

综上所述, 系统(1)关于 λ 有 3 个分叉值 $0, \lambda_1, \lambda_2$. 下面给出 3 种情形的 λ_1, λ_2 值.

1) 当 $A = 9, B = 1$ 时, $\lambda_1 = 11.09369847, \lambda_2 = 11.12988643$. 相应地, $a_1^* = 6.61800972, a_2^* = 6.688965, a_3^* = 6.75$.

2) 当 $A = 4, B = 1$ 时, $\lambda_1 = 2.191347846, \lambda_2 = 2.198496085$. 相应地, $a_1^* = 2.94133765, a_2^* = 2.97287, a_3^* = 3$.

3) 当 $A = B = 1$ 时, $\lambda_1 = 0.1369592404, \lambda_2 = 0.13740600532$. 相应地, $a_1^* = 0.735334413, a_2^* = 0.743218, a_3^* = 0.75$.

顺便指出, 文[7]研究的系统

$$\ddot{x} + x + x^2 = -\varepsilon(1 - x^2)\ddot{x}$$

无周期解的事实, 由以上的讨论可容易获得.

2 定量计算

设系统(1)的一阶近似周期解、频率和周期分别为^[6]

$$x(\tau) = a_0 \cos \tau + b_0 + \varepsilon(a_1 \cos \tau + b_1)$$

$$\omega(\tau) = \omega_0(\tau) + \varepsilon\omega_1(\tau)$$

$$T = \int_0^{2\pi} \frac{d\tau}{\omega(\tau)}$$

其中, $a_0, b_0, \omega_0, a_1, b_1, \omega_1$ 的表达式见文[6].

(1)中 A, B 和 λ 的 3 组取值, 分别计算如下.

(i) 设 $A=9, B=1, \lambda=1$, 可求得

$$a_0=1.9900299, b_0=-0.1491464, \omega_0(\tau)=\sqrt{8.7017071+1.326687\cos\tau}$$

$$a_1=3.2856219 \times 10^{-5}, b_1=1.1333021 \times 10^{-4}, T=2.147.$$

时间步长 $\Delta t=0.005$ 时, 四阶龙格-库塔法算的周期为 $\bar{T}=2.142$. 数值法与本文的结果比较见图 1(a).

(ii) 设 $A=4, B=\lambda=1$, 可得

$$a_0=1.95414204, b_0=-0.348603723, \omega_0(\tau)=\sqrt{3.3027926+1.3027613\cos\tau}$$

$$a_1=5.8943623 \times 10^{-4}, b_1=2.40134776 \times 10^{-3}, T=3.210015.$$

数值法算得的周期 $\bar{T}=3.205$. 由上述各量代入文[6]的有关各式, 可得系统振动频率 $\omega(\tau)$ 的表达式. 相图见图 1(b).

(iii) 设 $A=B=1, \lambda=0.1290881$, 可得

$$a_0=0.7, b_0=-0.205608, \omega_0(\tau)=\sqrt{0.34667+0.466667\cos\tau}$$

$$a_1=2.062743621 \times 10^{-4}, b_1=1.3404426 \times 10^{-3}, T=6.44893.$$

数值法算得的周期 $\bar{T}=6.475$. 由文[6]及以上各量, 可得频率 $\omega(\tau)$ 的表达式. 相图见图 1(c).

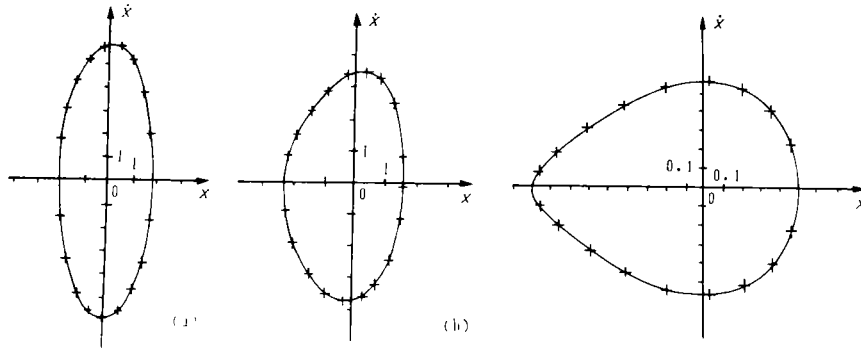


图 1 系统(1)的相图

Fig. 1 Projections of system(1)

— 数值法, + 本文方法

(a) $A=9, B=\lambda=1, \epsilon=0.25$ (b) $A=4, B=\lambda=1, \epsilon=0.25$ (c) $A=B=1, \lambda=0.1290881$

3 结 语

本文的分析表明, 文[6]关于强非线性自治系统周期解的定性分析十分有效. 它不仅给出了周期的存在性、唯一性和稳定性的简明判别法, 还揭示了周期解随参数变化而产生、稳定、分叉和消失的过程. 本文的一阶近似解与数值解的相图几乎完全重合, 两种方法所得到的周期之误差仅为千分之几. 由频率与周期的关系可知, 频率的误差一般不超过周

期的误差. 从而说明文〔6〕所引进的非线性时间变换是合理的.

参 考 文 献

- 1 Burton T D. Int J Non-Linear Mech, 1982, 17;7~19
- 2 徐兆. 非线性力学中一种新的渐近方法. 力学学报, 1985(3):266~271
- 3 戴世强. 一类非线性振动系统的渐近解. 中国科学, 1986(1):34~40
- 4 李骊. 强非线性系统的频闪法. 力学学报, 1990(2):402~412
- 5 Lau S L, Cheng Y K, Wu S Y. ASME J Appl Mech, 1982, 49;849~853
- 6 徐兆, 黄赅彪. 非线性振子极限环的实用分析法. 力学与实践, 1988, 5;6~10
- 7 王振东, 程友良. 对一类强非线性系统的分析. 力学学报, 1990(5):356~361

On a Class of Unsymmetric Oscillators with a Parameter

*Huang Chengbiao**

Abstract The existence, uniqueness, stability and expression of the periodic solutions for a class of unsymmetric oscillators with a parameter are studied. The relationship between the amplitudes of the periodic solutions and the parameters is given. Also the bifurcations are obtained. The first-order expressions of the periodic solutions, period and frequency are computed employing the generalized L-P method. Comparisons with the numerical method are made.

Keywords unsymmetric oscillator, periodic solutions, bifurcations

* Department of Applied Mechanics and Engineering, Zhongshan University, Guangzhou 510275