

污水处理系统的紊流方程组及其应用

郭金基 张应元
(应用力学与工程系)

摘要 阐述污水处理系统的紊流模型方程组,包括雷诺方程和k-ε方程组,讨论了液体射流泵的非浮力射流的计算,并考虑浮力作用的旋流流体的数学方程。最后给出了旋流充气浮的污水处理装置的应用实例。

关键词 紊流模型,污水处理系统,非浮力射流,旋流流体

在环境治理中,沉淀体系污水和气浮法分离工业废水的液-气射流泵以及旋流流体的紊流模型,在国内外均引起了广泛重视。由于紊流模型极其复杂,质量的传输和动量交换形成三维的紊流混合流场,加上气浮分离过程各类表面活性剂的作用,相态间密度梯度变化大,给理论研究带来了很大困难。本文介绍污水处理系统以液泵加压的废水为工作介质的紊流模型方程组,液体射流泵的非浮力射流的计算方程及旋流流体的数学方程,采用k-ε紊流模型探讨其封闭条件,并讨论了应用问题。

1 污水处理系统紊流方程组的建立

环境治理的流动中,流体要考虑粘性力的作用,速度、压力和标量(如温度或污染物的浓度)分成时均值和脉动值。如选取正交座标 x_i ,在相应座标的分量应满足下列方程组

$$\text{连续性方程 } \frac{\partial \rho}{\partial t} + \frac{\partial(\rho u_i)}{\partial x_i} = 0 \quad (1)$$

Reynold引入湍流的瞬时速度场满足Navier-Stokes方程。引进了包括湍流惯性张量 $u'_i u'_j$ 新项,建立湍流平均动量的方程,称为雷诺方程,可表示为^[1,2]

$$\frac{\partial u_i}{\partial t} + u_j \frac{\partial u_i}{\partial x_j} = F_i - \frac{1}{\rho} \nabla P + \frac{1}{\rho} \nabla (\lambda \nabla \cdot U) + \frac{1}{\rho} \nabla \cdot \tau_{ij} \quad (2)$$

式中, ρ 为流体的密度; u_i 为时均速度; P 为流体的压力; F_i 为体积力; $\nabla = \frac{\partial}{\partial x_1} i + \frac{\partial}{\partial x_2} j + \frac{\partial}{\partial x_3} k$; λ 为膨胀粘性系数; U 为速度矢量。 τ_{ij} 为除去压力 P 部分的应力张量

$$\tau_{ij} = \mu \left(\frac{\partial u_i}{\partial x_j} + \frac{\partial u_j}{\partial x_i} \right) - \rho u'_i u'_j \quad (3)$$

本文1991年4月8日收到

其中, μ 为动力粘性系数。

Boussinesq用平均运动场的局部速度梯度来表示局部的雷诺应力, 引入涡粘性系数的概念作如下假设

$$-\overline{u'_i u'_j} = \nu_t \left(\frac{\partial u_i}{\partial x_j} + \frac{\partial u_j}{\partial x_i} \right) - \frac{2}{3} \delta_{ij} k \quad (4)$$

式中, u'_i 为脉动速度分量, ν_t 为涡粘性系数; k 为紊动能

$$k = \frac{1}{2} \overline{u'_i u'_i} \quad (5)$$

温度或浓度方程^[3]

$$\frac{\partial \Phi}{\partial t} + u_i \frac{\partial \Phi}{\partial x_i} = \frac{1}{\rho} \frac{\partial}{\partial x_i} (-\rho \overline{u'_i \varphi}) + S_\Phi \quad (6)$$

状态方程

$$\rho = \rho(\Phi) \quad (7)$$

式中, Φ 是时均标量, φ 是脉动标量, 它们既可代表温度, 也可代表浓度, 视实际问题而定。 S_Φ 是体积热源项, 例如它可以表示因化学反应或生物反应而引起的热的产生率,

$-\rho \overline{u'_i \varphi}$ 称为紊动热流率或质量流率。

求解上述方程的主要问题是确定紊动(雷诺)应力 $-\rho \overline{u'_i u'_j}$ 和紊动热流率或质量流率 $-\rho \overline{u'_i \varphi}$ 。方程式(4)中涡粘性系数 ν_t 强烈的依赖于紊动状态。从流动的一点到另一点, 从一种流动到另一种流动, 它都可能显著变化。例如, 平面射流中, ν_t 随离射流源距离的 $\frac{1}{2}$ 次幂而增长 ($\nu_t = L^{1/2}$), 因而(4)式还不能将 $-\rho \overline{u'_i u'_j}$ 和 $-\rho \overline{u'_i \varphi}$ 确定。为此, 必须引入紊动模型, 以低价的紊动关联量或时均流参量来对某阶紊动关联量取近似, 其所描述的规律模拟了实际紊动的平均特征, 这些规律用微分方程和(或)代数方程表示, 与上述方程式一起构成了封闭的方程组。

在紊动的工程应用理论中, 雷诺把模式分为4类: “0”方程、“1”方程、“2”方程及应力方程模式。本文先介绍“1”方程模式。

利用Navier-Stokes方程可以导出在高雷诺数流动下以紊动能 k 作为变量的一个微分方程, 这个紊动能 k 方程称“1”方程模式^[3]

$$\underbrace{\frac{\partial k}{\partial t} + u_i \frac{\partial k}{\partial x_i}}_{\text{I}} = \underbrace{\frac{\partial}{\partial x_i} \left(\frac{\nu_t}{\sigma_k} \frac{\partial k}{\partial x_i} \right)}_{\text{I}} + \underbrace{\nu_t \left(\frac{\partial u_i}{\partial x_j} + \frac{\partial u_j}{\partial x_i} \right) \times \frac{\partial u_i}{\partial x_j}}_{\text{I}} + \underbrace{\beta F_i \frac{\nu_t}{\sigma_t} \frac{\partial \Phi}{\partial x_i}}_{\text{II}} - \underbrace{C_D \frac{k^{3/2}}{L}}_{\text{V}} \quad (8)$$

(8)式中用罗马数字标注的各项, 其意义为: (I)紊动能 k 的变化率(包括时均流动产生的对流输运); (II)速度脉动和压力脉动产生的扩散输运, 此处引入梯度扩散

假定而导出; (Ⅲ) 雷诺应力与时均速度梯度互相作用而形成的 k 的产生率称为剪切产生率, 记为 ϕ , 这里引入(4)式而导出; (Ⅳ) 在浮力流中, 由浮力引起 k 的产生率或销毁率(紊动能 k 与势能之间的交换), 记为 G ; (Ⅴ) 粘性作用转化为热而引起 k 的耗散率, 记为 ε ; 它等于运动粘性系数 ν 乘以脉动旋涡强度 $\left(\frac{\partial u'_i}{\partial x_j}\right)^2$, 即:

$$\varepsilon = \nu \frac{\partial u'_i}{\partial x_j} \cdot \frac{\partial u'_i}{\partial x_j} \quad (9)$$

引入科莫哥洛夫的论点^[4], 所耗散的紊动能的数量由高雷诺数的载能运动所决定, 即:

$$\varepsilon = C_D k^{3/2} / L.$$

(8)式中 ν_t 按科莫哥洛夫-普朗特(Kolmogorov-Prandtl)表达为

$$\nu_t = C'_\mu \sqrt{k} \cdot L \quad (10)$$

(8)~(10)式中, C_D , C'_μ 为经验常数, L 是紊动特征长度; β 是体膨胀系数; σ_k 是模型经验常数. 高雷诺数流动时, 文[5]给出 $C'_\mu \cdot C_D \approx 0.08$, $\sigma_k = 1$.

(10)式中包含紊动特征长度 L , 要完成紊动模拟须确定 L , 但要找一个广泛有效的计算 L 的公式是极其困难的, 通常采用的变量是粘性耗散率 ε (见(9)式 $\varepsilon \propto k^{3/2} L$). 所谓 k - ε 模型正是使用 k 方程和 ε 方程, 又称“2”方程模式.

在高雷诺数流动局部是各向同性的紊动中, 精确的耗散率 ε 可以用 N - S 方程导出^[3]

$$\underbrace{\frac{\partial \varepsilon}{\partial t} + u_i \frac{\partial \varepsilon}{\partial x_i}}_{\text{I}} = \underbrace{\frac{\partial}{\partial x_i} \left(\frac{\nu_t}{\sigma_\varepsilon} \frac{\partial \varepsilon}{\partial x_i} \right)}_{\text{I}} + \underbrace{C_{1\varepsilon} \frac{\varepsilon}{k} (\phi + G)}_{\text{II}} (1 + C_{3\varepsilon} R_f) - C_{2\varepsilon} \varepsilon^2 / k \quad (11)$$

(11)用罗马数字标注的各项意义如下: (Ⅰ) 耗散率 ε 的变化率(包括时均流动产生的对流输运); (Ⅱ) 速度脉动和 ε 的脉动乘积而产生的扩散输运, 此处引入梯度扩散假设而得; (Ⅲ) 由于涡旋拉伸造成的产生率和粘性销毁率项; ϕ 、 G 的含意如同(8)式. 在浮力流中, 须加入浮力作用, 文[5]建议用 $[(\phi + G)/\varepsilon](1 + C_{3\varepsilon} R_f)$ 代替非浮力流的 ϕ/ε 而导出的. R_f 称为黎查森数(与其乘子 $C_{3\varepsilon}$ 的取值要考虑浮力作用方式尚有争论).

k - ε 模型分别用(8)、(11)计算 k 、 ε 的分布; 并用(9)、(10)消去 L , 令 $C_\mu = C'_\mu \cdot C_D$,

可得涡粘性系数 ν_t 和扩散系数 Γ_t 与 $k \cdot \varepsilon$ 两个参量关联起来, 即

$$\nu_t = C_\mu k^2 / \varepsilon, \quad \Gamma_t = \nu_t / \sigma_t \quad (12)$$

式中 σ_t 为普朗特数或施密特数, 文[3]推荐 k - ε 模型常数值如表1所示.

表1 k - ε 模型常数值^[3]
Tab.1 Constant value of the k - ε model

C_μ	$C_{1\varepsilon}$	$C_{2\varepsilon}$	$C_{3\varepsilon}$	σ_k	σ_ε
0.09	1.44	1.92	0.8	1.0	1.3

以上包含 u_i 、 p 、 $\overline{u'_i u'_j}$ 、 $\Phi(\rho)$ 、 ν_t 、 k 、 $\varepsilon(L)$ 共14个未知量,但具有式(1)、(2)、(4)、(6)、(10)、(8)和(11)共14个方程,构成封闭的方程组。

2 非浮力射流的计算

液体射流泵流场的速度分布的计算可以应用 k - ε 模型进行。假设①流体可忽略浮力的作用;②不可压缩和定常运动;③轴对称流动;④喷咀出口截面上工作流体与被引射流体互不混合,但紧密流动。射流泵如图1所示。选取圆柱坐标 r 、 θ 、 z , 泵内部工作流体应满足的基本方程组为

(i) 连续性方程: 由(1)式采用圆柱坐标而求得。

(ii) 雷诺方程: 将(3)式 τ_{ij} 写成柱坐标后,代入(2)式,利用定常、不可压缩、轴对称的条件和 Boussinesq 假定;并利用连续性方程对 r 求偏导数后加以简化得雷诺方程。

(iii) k - ε 紊流模型: 在高雷诺数条件下充分湍流区,可忽略 ν 的影响。依据基本假设,可以(8)、(11)式用圆柱坐标写出 k - ε 紊流方程组。

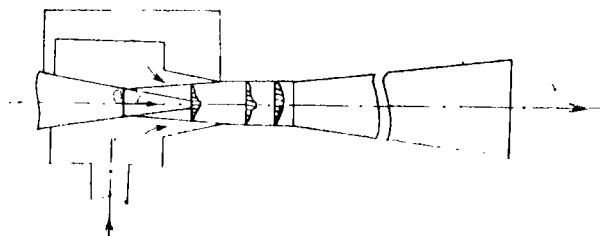


图1 液体射流泵

Fig.1 Liquid jet pump

上述方程组包含未知量为 u_r 、 u_z 、 p 、 ν_t 、 k 、 ε 与方程数目相等,因而方程组是封闭的,但还必须给出边界条件。除在喷咀出口截面两股流体紧密流动外,壁面边界必须考虑粘性影响,可分粘性底层、过渡层及紊流区写出边界条件,并且要写出混合室(颈缩段)出口流体的速度条件。利用这些方程和边界条件构成定解化,可以计算液体射流泵内部流场的速度。用计算流体有限控制体积法¹⁾,将方程离散化用上风方案进行数值模拟,得出不同断面流场的速度分布,并用激光测速仪测量流体的速度进行对照比较。

环境问题的泵内液体射流常常抽吸气体,两股流体介质不同,称为液-气射流泵,紊流模型更为复杂,必须考虑相态方程属两相流体的紊流掺和,通过实测工作流体及被引射流体的速度分布(忽略浮力的影响),列出流体的动量方程、能量方程及连续性方程;利用液-气射流泵端口的条件和自由射流流速取极值条件,可以导出决定液-气射流泵基本性能及几何尺寸的计算公式。我们设计的60c00~60f00系列的液-气射流泵已在气浮-旋流污水处理系统得到应用,效果良好。

1) 陆宏折, 路仲篪, 有限空间射流的数值模拟, 第三届全国喷射技术学术会议论文集, 1989年12月

3 旋动流体的数学方程

污水处理旋动流体是三维的流场(见图2)。假定流体是不可压缩和稳定(定常)流动。选取圆柱坐标 r 、 θ 和 z ; 相应的速度分量分别记为 u_r 、 u_θ 、 u_z (时均标量); 压力 p 及标量 Φ (浓度及温度)的分布应满足下列方程组:

(i) 连续性方程: 从(1)式写出柱坐标的表示式为

$$\frac{\partial u_r}{\partial r} + \frac{\partial u_\theta}{r \partial \theta} + u_r/r + \frac{\partial u_z}{\partial z} = 0 \quad (13)$$

(ii) 雷诺方程: 从(2)式利用不可压缩和稳定流动的假定, 雷诺方程可写为

$$\begin{aligned} u_r \frac{\partial u_r}{\partial r} + u_\theta \frac{\partial u_r}{r \partial \theta} + u_z \frac{\partial u_r}{\partial z} - \frac{u_\theta^2}{r} &= F_r - \frac{1}{\rho} \frac{\partial p}{\partial r} + \frac{1}{\rho r} \left[\frac{\partial(r\tau_{rr})}{\partial r} + \frac{\partial\tau_{\theta r}}{\partial \theta} + \frac{\partial(r\tau_{rz})}{\partial z} \right] - \frac{\tau_{\theta\theta}}{r} \\ u_r \frac{\partial u_\theta}{\partial r} + u_\theta \frac{\partial u_\theta}{r \partial \theta} + u_z \frac{\partial u_\theta}{\partial z} + \frac{u_r u_\theta}{r} &= F_\theta - \frac{1}{\rho} \frac{\partial p}{r \partial \theta} + \frac{1}{\rho r} \left[\frac{\partial(r\tau_{r\theta})}{\partial r} + \frac{\partial\tau_{\theta\theta}}{\partial \theta} + \frac{\partial(r\tau_{z\theta})}{\partial z} \right] + \frac{\tau_{r\theta}}{r} \\ u_r \frac{\partial u_z}{\partial r} + u_\theta \frac{\partial u_z}{r \partial \theta} + u_z \frac{\partial u_z}{\partial z} &= F_z - \frac{1}{\rho} \frac{\partial p}{\partial z} + \frac{1}{\rho r} \left[\frac{\partial(r\tau_{rz})}{\partial r} + \frac{\partial\tau_{\theta z}}{\partial \theta} + \frac{\partial(r\tau_{zz})}{\partial z} \right] \end{aligned} \quad (14)$$

将(3)、(4)式写成柱坐标分量代入(14)式, 可得三维旋流的雷诺方程。

(iii) 温度或浓度方程: 从(6)式写出在稳定流动下

$$\begin{aligned} u_r \frac{\partial \Phi}{\partial r} + u_\theta \frac{\partial \Phi}{r \partial \theta} + u_z \frac{\partial \Phi}{\partial z} &= \frac{1}{\rho} \left[\frac{\partial}{\partial r} (-\rho r u'_r \varphi) + \frac{\partial}{r \partial \theta} (-\rho u'_\theta \varphi) \right. \\ &\quad \left. + \frac{\partial}{\partial z} (-\rho u'_z \varphi) \right] + S_\Phi \end{aligned} \quad (15)$$

及状态方程 $\rho = \rho(\Phi)$

式中 $-\rho u'_i \varphi$ 为紊动热流率或质量流率。

(iv) k - ε 紊流方程: 由(8)式紊动能 k 方程可以写为

$$\begin{aligned} u_r \frac{\partial k}{\partial r} + u_\theta \frac{\partial k}{r \partial \theta} + u_z \frac{\partial k}{\partial z} &= \frac{1}{r} \frac{\partial}{\partial r} \left[r v_t \frac{\partial k}{\sigma_k \partial r} \right] + \frac{\partial}{r \partial \theta} \left[\frac{v_t}{\sigma_k} \frac{\partial k}{r \partial \theta} \right] + \frac{\partial}{\partial z} \left[\frac{v_t}{\sigma_k} \frac{\partial k}{\partial z} \right] \\ &\quad + v_t \phi_2 - \varepsilon + \beta \frac{v_t}{\sigma_\varepsilon} \left[F_r \frac{1}{r} \frac{\partial}{\partial r} (r\Phi) + F_\theta \frac{1}{r} \frac{\partial \Phi}{\partial \theta} + F_z \frac{\partial \Phi}{\partial z} \right] \end{aligned} \quad (16)$$

$$\begin{aligned} \text{式中, } \phi_2 &= 2 \left[\left(\frac{\partial u_r}{\partial r} \right)^2 + \left(\frac{1}{r} \frac{\partial u_\theta}{\partial \theta} + \frac{u_r}{r} \right)^2 + \left(\frac{\partial u_z}{\partial z} \right)^2 + \frac{1}{2} \left(\frac{\partial u_\theta}{\partial r} + \frac{1}{r} \frac{\partial u_r}{\partial \theta} - \frac{u_\theta}{r} \right)^2 \right. \\ &\quad \left. + \frac{1}{2} \left(\frac{1}{r} \frac{\partial u_z}{\partial \theta} + \frac{\partial u_\theta}{\partial z} \right)^2 + \frac{1}{2} \left(\frac{\partial u_r}{\partial z} + \frac{\partial u_z}{\partial r} \right)^2 \right] \end{aligned} \quad (17)$$

由(11)式粘性耗散率 ε 写为

$$\begin{aligned} u_r \frac{\partial \varepsilon}{\partial r} + u_\theta \frac{\partial \varepsilon}{r \partial \theta} + u_z \frac{\partial \varepsilon}{\partial z} &= \frac{1}{r} \frac{\partial}{\partial r} \left(r \frac{v_t}{\sigma_\varepsilon} \frac{\partial \varepsilon}{\partial r} \right) + \frac{1}{r} \frac{\partial}{\partial \theta} \left(\frac{v_t}{\sigma_\varepsilon} \frac{\partial \varepsilon}{r \partial \theta} \right) \\ &\quad + \frac{\partial}{\partial z} \left[\frac{v_t}{\sigma_\varepsilon} \frac{\partial \varepsilon}{\partial z} \right] + C_{1\varepsilon} \frac{\varepsilon}{k} (\phi + G) (1 + C_{3\varepsilon} Rf) - C_{2\varepsilon} \frac{\varepsilon^2}{k} \end{aligned} \quad (18)$$

式中, ϕ 、 G 如同(8)式所定义: $\phi = \nu_t \phi_z$; G 即为(16)式右边第6项。

上述方程组已考虑浮力及浓度(或温度)扩散的影响, 包含有 u_r 、 u_θ 、 u_z 、 p 、 Φ 、 ν_t 、 k 、 ϵ 未知量, 现有(13)、(14)、(15)、(16)、(18)及(12)共8个方程, 构成封闭系统, 这一方程组的求解极其复杂, 要用数值计算流体力学方法进行, 同时考虑浮力的作用, 对浮力常数 $C_{3\epsilon}$ 及黎查森数 R_f 的定义尚有争议。我们考虑浮力作用的方式, 对浮力剪切层的方向及其产生率认真加以考虑, 选取合理的 $C_{3\epsilon}$ 、 R_f 后才计算。

4 应用与讨论

(1) 在环境问题中, 旋流模型及射流泵应用于沉淀污水处理曝气池及气浮法分离工业废水中的金属离子^[6], 首先由液-气射流泵的工作流体抽吸气体进入混合室进行紊流掺和, 两股流体充分进行动量交换和质量传递, 在混合室出口汇成一股新的流体, 然后这股流体切向进入旋流装置, 由于旋流增加流体微团间的动态作用, 包括能量及动量交换和质量传递, 促进流体与微生物团的充分混合, 再进入另一旋流装置由旋流离心力、Magnus力和重力作用进行分离, 大大地提高了治理效果。有关液-气射流泵的计算将另文详细论述。旋流流体的紊流模型仅考虑液相情况下可依据(13)~(18)组成的控制方程组进行计算, 但对 ϵ 方程及其中的浮力作用影响, $C_{3\epsilon}$ 及 R_f 数的确定尚待研究。若考虑多相流情况下, 还要增加相态方程, 计算量巨大。但通过数值计算对了解流场结构是有裨益的。

(2) 作为流体工程上的应用, 我们通过液-气(固)旋流器旋流流场的测定^[2],^[7,8], 根据雷诺相似的条件, 将旋风分离器的计算公式转换到旋流混合和分离器的设计计算中去。计算出旋流器入口尺寸及直径, 上旋或下旋入口角度, 旋转数及上、下行速度, 并且计算处理废水量及分离效率。这一套旋流-气浮装置*处理废水量从原来的 1 t/h 提高到 5 t/h, 分离重金属离子从原来的 100 ppm 提高到 250 ppm, 效率提高 5 倍以上。已由香港松柏公司加工成专用设备, 已在香港荃湾精美塑料电镀厂等单位得到应用。

(3) 本文讨论的 k - ϵ 紊流模型仍隐含一个缺陷^[3], 即假设紊流的局部状态可用一个速度来表征, 并假定雷诺应力(4)均用涡粘性系数 ν_t 来表示。从(10)式可见速度尺度 $L = C'_\mu \sqrt{k} / \nu_t$ 在输运过程 k - ϵ 方程已被考虑, 而各个应力的输运却未恰当计及。为了允

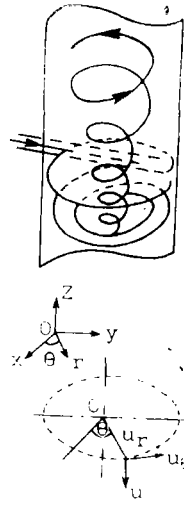


图2 污水处理的旋流气浮装置
Fig.2 Device of cyclone acartion flotation of the wastewater treatment

2) 郭金基等. 液-气(固)旋流分离器的实验研究及应用. 全国环境流体力学学术会议论文集, 1990, 12

* 与中山大学化学系环保室朱锡海、孔宪祥等合作研究的, 并已申请专利

许各个雷诺应力参予输运过程并有不同变化, 已研究出采用各个应力 $\overline{u'_i u'_j}$ 输运过程的模型, 对紊动热量或质量流率 $\overline{u'_i \varphi}$ 也类似地建立输运过程, 与 $k-\varepsilon$ 方程联系在一起使用, 已能合理的预报一些实际的环境流动问题。可惜建立在 $\overline{u'_i u'_j}$ 和 $\overline{u'_i \varphi}$ 输运方程上的紊流模型相当复杂, 实际应用迄今却不多。作为工程的实际应用, 本文建立的紊流模型方程组仍有较大的实用意义。

参 考 文 献

- 1 F M 怀特著(魏中磊等译)。粘性流体力学。北京:机械工业出版社, 1982
- 2 赵学端, 廖其莫编。粘性流体力学。北京:机械工业出版社, 1983
- 3 罗迪 W著(贺益英译)。环境问题的紊流模型。北京:水利电力出版社, 1986
- 4 Kolmogorow, A N C R Acad Sci VSSR, 1941, 30:301, 32:16
- 5 Hanjalic K, Launder B. Turbulent transport modelling of separating and re-attaching shear flows, Report, TF/7818, University of California at Davis, 1978
- 6 Nonaka M. Separation Science and Technology, 1986, 21(5):457~474
- 7 郭金基, 张应元等。液-气(固)旋流分离器流场的测定和分离粒径的计算。水动力学研究与进展, A辑(增刊), 1991, 6
- 8 Guo Jinji, Zhang Diming, Zhang Yingyuan, Yang Zonglian. Environmental Hydraulics, Vol.2, A A BALKEMA Press Publish, 1991, 1589~1593

The Turbulent Flow Equations of the Wastewater Treatment System and Its Application

Guo Jinji* Zhang Yingyuan

Abstract The paper presents turbulent flow equations of the wastewater treatment system including Reynolds and $k-\varepsilon$ equations. The computation of non-buoyancy jet of the liquid jet pump is discussed. Mathematical equations of whirl fluid concerning bouyancy function are studied. Finally, examples of the device of cyclone aeration flotation are illustrated.

Keywords model of turbulent flow, wastewater treatment system, non-buoyancy jet, whirl fluid

* Department of Applied Mechanics and Engineering